

基于超螺旋滑模控制的永磁同步电机 磁场定向控制研究

李耀华*, 王自臣, 何雨颀, 曲含章, 王禹涵, 王钦政
(长安大学汽车学院, 陕西 西安 710064)

Field-Oriented Control of Permanent Magnet Synchronous Motor Based on Super-Twisting Sliding Mode Control

LI Yaohua, WANG Zichen, HE Yuxie, QU Hanzhang, WANG Yuhan, WANG Qinzhen
(School of Automobile, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: [Objective] In field-oriented control (FOC) system of traditional permanent magnet synchronous motor (PMSM), the speed loop and the stator dq -axis current loops typically adopt proportional integral (PI) control, which results in a significant speed overshoot. Although sliding mode control (SMC) can reduce overshoot, it still suffers from slow dynamic response and significant current ripple. [Methods] To address these issues, this study adopted super-twisting sliding mode control (STSMC) to regulate the speed outer loop and stator dq -axis current inner loop to improve response speed and suppress speed and current ripples, thereby enhancing the dynamic and steady-state performance of the system. Furthermore, to improve system robustness under external load disturbances, an extended state observer (ESO) was designed to observe disturbances. By treating the load as an extended state variable, the proposed method reduced speed recovery time and mitigated speed drop during sudden load torque changes through feedforward compensation, thereby enhancing system robustness. [Results] Simulation results showed that under an operating condition of 1 000 r/min reference speed and 10 N·m step load, compared with speed SMC, the STSMC reduced the speed regulation time by 86.25%, the root mean square error (RMSE) of speed ripple by 95.35%, the d -axis current ripple RMSE by 45.44%, and the q -axis current ripple RMSE by 34.31%. Compared with speed SMC, the STSMC based on ESO (STSMC-ESO) reduced the speed

regulation time by 86.25%, the speed ripple RMSE by 95.70%, the d -axis current ripple RMSE by 45.61%, and the q -axis current ripple RMSE by 37.02%. Moreover, under external load disturbances, compared with STSMC, STSMC-ESO reduced the speed drop by 21.81% and the speed recovery time by 90%. [Conclusion] The STSMC-ESO strategy effectively reduces speed overshoot and enhances dynamic response speed. Meanwhile, it suppresses system chattering and significantly reduces speed and current ripples, thus improving steady-state performance of the system. Under external load disturbances, the system can quickly recover speed and maintain relative stability.

Key words: permanent magnet synchronous motor; field-oriented control; sliding mode control; super-twisting sliding mode control; extended state observer

摘要: [目的]传统永磁同步电机(PMSM)磁场定向控制(FOC)系统的转速环和定子 dq 轴电流环通常采用比例积分(PI)控制,导致转速超调量较大。采用滑模控制(SMC)可减小超调量,但仍存在动态响应较慢,电流脉动较大的问题。[方法]针对此问题,本文采用超螺旋滑模控制(STSMC)来调节转速外环和定子 dq 轴电流内环,以提升响应速度,抑制转速脉动和电流脉动,从而提升系统的动态性能和稳态性能。进一步地,为提升系统在外界负载扰动下的鲁棒性,设计扩张状态观测器(ESO)观测扰动,将负载扩张为新的状态量,在负载转矩突变时通过前馈补偿减少转速恢复时间和转速跌落,从而提升系统鲁棒性。[结果]仿真结果表明,在1 000 r/min基准转速、10 N·m阶跃负载工况下,相较于转速SMC,STSMC的转速调节时间减少86.25%,转速脉动均方根误差(RMSE)减小95.35%, d 轴电流脉动RMSE减小45.44%, q 轴电流脉动RMSE减小34.31%;相较于转速SMC,基于ESO的

基金项目:长安大学2024年大学生创新训练计划项目
(X202410710494)

College Students' Innovative Entrepreneurial Training Program
of Chang'an University 2024 (X202410710494)

STSMC(STSMC-ESO)的转速调节时间减少 86.25%,转速脉动 RMSE 减小 95.70%, d 轴电流脉动 RMSE 减小 45.61%, q 轴电流脉动 RMSE 减小 37.02%;存在外界负载扰动时,相较于 STSMC,STSMC-ESO 的转速跌落减少 21.81%,转速恢复时间减少 90%。【结论】STSMC-ESO 策略可有效降低转速超调量,提升系统动态响应速度,同时削减系统抖振,大幅降低转速和电流脉动,改善系统的稳态性能,当受到外界负载扰动后,转速能快速恢复并保持相对稳定。

关键词: 永磁同步电机;磁场定向控制;滑模控制;超螺旋滑模控制;扩张状态观测器

0 引言

永磁同步电机 (Permanent Magnet Synchronous Motor, PMSM) 磁场定向控制 (Field-Oriented Control, FOC) 通过旋转坐标变换实现磁链与转矩的解耦控制^[1-3],具有结构简单、性能良好的特点,在电动汽车驱动领域得到广泛应用^[4-5]。传统 FOC 系统的转速外环和定子 dq 轴电流内环采用比例积分 (Proportional Integral, PI) 控制^[6-7],但 PI 控制存在系统快速性与稳定性的矛盾,且鲁棒性较差^[8-9]。

滑模控制 (Sliding Mode Control, SMC) 结构简单^[10-11]、超调量小、抗干扰能力强^[12]且对参数变化不敏感,近年来在 PMSM FOC 系统中得到广泛应用^[13-16]。但传统 SMC 沿滑模面进行趋近运动,导致系统动态性能不佳。文献^[17-18]对趋近律进行改进,设计了新型分数阶趋近律,降低了转速超调量,提升了响应速度。文献^[19]对滑模面进行改进,设计了非奇异终端滑模面,降低了转速超调量,提升了响应速度。文献^[20]将超螺旋滑模控制 (Super-Twisting SMC, STSMC) 算法引入转速环控制器,提升了响应速度,但是鲁棒性没有明显提升。文献^[21]采用快速终端滑模面设计超螺旋滑模转速控制器以提升响应速度,并结合鲁棒微分器优化系统鲁棒性。文献^[22]提出改进型超螺旋滑模线性自抗扰控制策略,利用滑模算法对线性扩张状态观测器 (Extended State Observer, ESO) 和线性状态误差反馈控制律进行优化,提升了动态响应性能和抗扰性能。以上研究均仅将 STSMC 应用于转速环控制中,但电流环仍然使用传统的 PI

控制器,电流脉动较大。

本文采用 STSMC 对转速外环和定子 dq 轴电流内环进行控制,使系统状态能快速稳定收敛。STSMC 具有更快的响应速度和更低的超调量,应用在转速环可提升响应速度,应用在电流环可有效降低电流脉动。为增强系统鲁棒性,设计 ESO 将系统负载扩张为新的状态量,跟踪系统扰动。仿真结果表明,相较于传统 PI 控制和转速环 SMC,采用基于 ESO 的 STSMC(STSMC-ESO)可有效提升系统的响应速度,降低电流脉动,改善系统的稳态性能;且在负载转矩突变时,转速跌落更少,恢复速度更快,增强了系统的鲁棒性。

1 基于 STSMC 的 FOC

传统转速环 SMC 虽然减小了超调量,提升了抗扰性能^[23-24],但动态响应较慢,且电流环仍采用 PI 控制,电流脉动较大。而超螺旋滑模相轨迹以螺旋状直接收敛到平衡点,无需沿滑模面收敛,大幅提升了动态响应速度^[25-26]。因此,本文采用 STSMC 控制器改善对转速环和电流环的控制。

1.1 转速环 STSMC

表贴式 PMSM (Surface PMSM, SPMSM) 转子运动方程如式 (1) 所示:

$$\frac{d\omega_m}{dt} = -\frac{B}{J}\omega_m + \frac{3p\psi_f}{2J}i_q - \frac{T_L}{J} \quad (1)$$

式中: i_q 为定子 q 轴电流; B 为粘性摩擦因数; J 为转动惯量; T_L 为负载转矩; p 为电机极对数; ω_m 为电机机械角速度; ψ_f 为永磁体磁链。

将 i_q 改写为定子 q 轴电流参考值 i_q^* ,则式 (1) 可表示为如式 (2) 所示的一阶误差状态方程:

$$\frac{d\omega_m}{dt} = -\frac{B}{J}\omega_m + \frac{3p\psi_f}{2J}i_q^* - \frac{T_L}{J} = a\omega_m + bu - d \quad (2)$$

式中: $a = -B/J$; $b = 1.5p\psi_f/J$; $d = T_L/J$; $u = i_q^*$ 为需要设计的目标控制律。

定义状态变量如式 (3) 所示:

$$x = \omega_m^* - \omega_m \quad (3)$$

式中: ω_m^* 为给定的电机机械角速度。

对式 (3) 求导可得:

$$\dot{x} = \dot{\omega}_m^* - \dot{\omega}_m = ax - bu + f(t) \quad (4)$$

式中: $f(t) = \dot{\omega}_m^* - a\omega_m^* + d$ 。

定义滑模面函数如式(5)所示:

$$s = x \quad (5)$$

结合式(4)和式(5)可得:

$$\dot{s} = \dot{x} = as - bu + f(t) \quad (6)$$

超螺旋滑模控制律 u 为

$$u = k_1 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) + k_2 \int \text{sign}(s) dt \quad (7)$$

式中: k_1, k_2 为待设计的转速环 STSMC 控制器增益系数, k_1, k_2 均大于 0。

k_1 决定收敛速度, k_1 增大可提高收敛速度, 但过大的 k_1 可能使抖振加剧; k_2 用于补偿系统扰动, k_2 增大可提升抗干扰能力, 但也可能引入高频噪声。因此, k_1 和 k_2 的选取需要依据仿真结果进行调试。将式(7)代入式(6), 可得:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= as - bu + f(t) = \\ &- k_{1d} |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) - k_{2d} \int \text{sign}(s) dt + as + f(t) \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $k_{1d} = bk_1; k_{2d} = bk_2$ 。

由文献[27]可知, 转速环 STSMC 控制器的稳定性条件可表示为式(9), 详细证明过程见附录。

$$\begin{cases} k_{1d} > 2.1 \\ k_{2d} > \\ \max \left\{ \frac{10k_{1d}^3 + 10k_{1d}\sigma^2 + 3k_{1d}^2 - 21\sigma^2 - 2k_{1d}}{4k_{1d}(10k_{1d} - 21)}, \frac{\sigma}{2} \right\} \end{cases} \quad (9)$$

1.2 电流环 STSMC

转子同步旋转坐标系下, SPMSM 电压方程如式(10)所示:

$$\begin{cases} u_d = R_s i_d + L_d \frac{d}{dt} i_d - \omega_e L_q i_q \\ u_q = R_s i_q + L_q \frac{d}{dt} i_q + \omega_e (L_d i_d + \psi_f) \end{cases} \quad (10)$$

式中: u_d, u_q 分别为定子 d, q 轴电压; i_d 为定子 d 轴电流; L_d, L_q 分别为定子 d, q 轴电感; R_s 为定子电阻; ω_e 为电机角速度。

定义状态变量如式(11)所示:

$$\begin{cases} x_d = i_d^* - i_d \\ x_q = i_q^* - i_q \end{cases} \quad (11)$$

式中: i_d^* 为定子 d 轴电流参考值。

对式(11)求导可得:

$$\begin{cases} \dot{x}_d = \dot{i}_d^* - \dot{i}_d = \frac{1}{L_d} (-u_d + R_s i_d - \omega_e L_q i_q) + \dot{i}_d^* \\ \dot{x}_q = \dot{i}_q^* - \dot{i}_q = \\ \frac{1}{L_q} (-u_q + R_s i_q + \omega_e L_d i_d + \omega_e \psi_f) + \dot{i}_q^* \end{cases} \quad (12)$$

对 d, q 轴电流解耦可得:

$$\begin{cases} u_d^* = u_d + \omega_e L_q i_q \\ u_q^* = u_q - \omega_e (L_d i_d + \psi_f) \end{cases} \quad (13)$$

将式(13)代入式(12), 可得:

$$\begin{cases} \dot{x}_d = \dot{i}_d^* - \dot{i}_d = \frac{1}{L_d} (-u_d^* + R_s i_d) + \dot{i}_d^* \\ \dot{x}_q = \dot{i}_q^* - \dot{i}_q = \frac{1}{L_q} (-u_q^* + R_s i_q) + \dot{i}_q^* \end{cases} \quad (14)$$

定义滑模面函数如式(15)所示:

$$\begin{cases} s_d = x_d \\ s_q = x_q \end{cases} \quad (15)$$

采用超螺旋滑模算法设计电流环控制器, 如式(16)所示:

$$\begin{cases} u_d^* = k_{1-d} |s_d|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_d) + k_{2-d} \int \text{sign}(s_d) dt \\ u_q^* = k_{1-q} |s_q|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_q) + k_{2-q} \int \text{sign}(s_q) dt \end{cases} \quad (16)$$

式中: $k_{1-d}, k_{1-q}, k_{2-d}$ 和 k_{2-q} 为待设计的电流环 STSMC 控制器增益系数, 且均大于 0。

将式(16)代入式(14)可得:

$$\begin{cases} \dot{s}_d = -k_{1-d}^* |s_d|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_d) - \\ k_{2-d}^* \int \text{sign}(s_d) dt - \frac{R_s}{L_d} s_d + f(t_d) \\ \dot{s}_q = -k_{1-q}^* |s_q|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_q) - \\ k_{2-q}^* \int \text{sign}(s_q) dt - \frac{R_s}{L_q} s_q + f(t_q) \end{cases} \quad (17)$$

式中: $k_{1-d}^* = \frac{k_{1-d}}{L_d}; k_{2-d}^* = \frac{k_{2-d}}{L_d}; f(t_d) = \frac{i_d^* R_s}{L_d} + \dot{i}_d^*; k_{1-q}^* =$

$\frac{k_{1-q}}{L_q}; k_{2-q}^* = \frac{k_{2-q}}{L_q}; f(t_q) = \frac{i_q^* R_s}{L_q} + \dot{i}_q^*$ 。

由此可得, 基于 STSMC 的 PMSM FOC 系统如图 1 所示。

与转速环相同, dq 轴电流环 STSMC 控制器

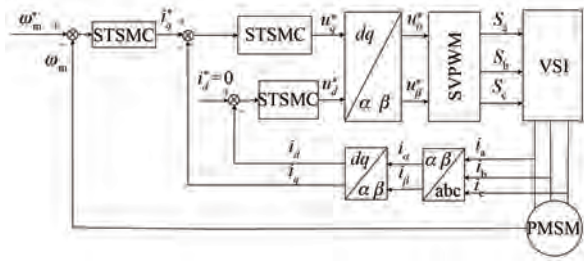


图1 基于 STSMC 的 SPMSM FOC 系统

Fig.1 SPMSM FOC system based on STSMC

的稳定性条件如式(18)和式(19)所示:

$$\begin{cases} k_{1i_d}^* > 2.1 \\ k_{2i_d}^* > \\ \max \left\{ \frac{10k_{1i_d}^{*3} + 10k_{1i_d}^* \sigma_1^2 + 3k_{1i_d}^{*2} - 21\sigma_1^2 - 2k_{1i_d}^* \sigma_1}{4k_{1i_d}^* (10k_{1i_d}^* - 21)}, \frac{\sigma_1}{2} \right\} \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} k_{1i_q}^* > 2.1 \\ k_{2i_q}^* > \\ \max \left\{ \frac{10k_{1i_q}^{*3} + 10k_{1i_q}^* \sigma_2^2 + 3k_{1i_q}^{*2} - 21\sigma_2^2 - 2k_{1i_q}^* \sigma_2}{4k_{1i_q}^* (10k_{1i_q}^* - 21)}, \frac{\sigma_2}{2} \right\} \end{cases} \quad (19)$$

1.3 基于扰动 ESO 的 STSMC

由式(8)可以看出,负载项 d 对于系统的控制性能有较大影响,可通过设计 ESO 观测扰动,在负载转矩突变时通过前馈补偿减小转速恢复时间,提升系统鲁棒性。

考虑负载扰动 Δc ,式(2)可改写为

$$\frac{d\omega_m}{dt} = -\frac{B}{J}\omega_m + \frac{3p\psi_f}{2J}i_q^* - \frac{T_L + \Delta c}{J} = a\omega_m + bu - \hat{d} \quad (20)$$

式中: $\hat{d} = (T_L + \Delta c)/J$ 。

式(4)可改写为

$$\dot{x} = \dot{\omega}_m^* - \dot{\omega}_m = ax - bu + \hat{d} + f'(t) \quad (21)$$

式中: $f'(t) = \dot{\omega}_m^* - a\omega_m^*$ 。

超螺旋滑模控制律 u 可改写为式(22),参数 k_1 和 k_2 保持不变。

$$u = k_1 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) + k_2 \int \text{sign}(s) dt + \frac{1}{b} \hat{d} \quad (22)$$

由此,式(8)可改写为

$$\dot{s} = as - bu + \hat{d} + f'(t) =$$

$$-k_{1d} |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) - k_{2d} \int \text{sign}(s) dt + as + f'(t) \quad (23)$$

由式(23)可知,该系统仍然满足原有的稳定性条件。

令系统的状态变量 $x_1 = \omega_m, x_2 = -\hat{d}$,输出 $y = x_1$,由于实际控制负载 $\hat{d}$ 变化缓慢,其一阶导数可视为 0,联合式(20)可得:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + x_2 + bu \\ \dot{x}_2 = 0 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (24)$$

以 x_1, x_2 为观测量,建立关于转速估计误差 $e = \omega_m^* - \omega_m$ 的高增益反馈观测器,如式(25)所示:

$$\begin{cases} e = y - \hat{x}_1 \\ \dot{\hat{x}}_1 = a\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + bu + \frac{\alpha_1}{\delta} e \\ \dot{\hat{x}}_2 = \frac{\alpha_2}{\delta^2} e \end{cases} \quad (25)$$

式中: $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ 分别为 x_1, x_2 的观测值; α_1, α_2 均为正实数; $\delta > 0$,通常 δ 值很小,以保证高增益,从而实现 $\hat{x}_1 \rightarrow x_1, \hat{x}_2 \rightarrow x_2$ 的跟踪效果。

采用 Lyapunov 函数证明扰动 ESO 的稳定性。

定义 η 如式(26)所示:

$$\eta = [\eta_1, \eta_2]^T \quad (26)$$

式中: $\eta_1 = \frac{x_1 - \hat{x}_1}{\delta}; \eta_2 = -\hat{d} - \hat{x}_2$ 。

联合式(24)和式(25)可得:

$$\delta \dot{\eta}_1 = \delta \frac{\dot{x}_1 - \dot{\hat{x}}_1}{\delta} =$$

$$(ax_1 + bu - \hat{d}) - \left(a\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + bu + \frac{\alpha_1}{\delta} e \right) =$$

$$(\delta a - \alpha_1) \eta_1 + \eta_2 = -\alpha'_1 \eta_1 + \eta_2 \quad (27)$$

$$\delta \dot{\eta}_2 = \delta (-\dot{\hat{d}} - \dot{\hat{x}}_2) =$$

$$\delta \left[-\dot{\hat{d}} - \frac{\alpha_2}{\delta^2} (x_1 - \hat{x}_1) \right] = -\alpha_2 \eta_1 - \delta \dot{\hat{d}} \quad (28)$$

式中: $-\alpha'_1 = \delta a - \alpha_1$ 。

由此可得状态误差方程如式(29)所示:

$$\delta \dot{\eta} = \bar{A} \eta + \delta \bar{B} (-\dot{\hat{d}}) \quad (29)$$

$$\text{式中: } \bar{A} = \begin{bmatrix} -\alpha'_1 & 1 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix}; \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

由式(29)求得矩阵 $\bar{A}$ 的特征方程如式(30)所示:

$$|\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}| = \lambda^2 + \lambda \alpha'_1 + \alpha_2 = 0 \quad (30)$$

式中: I 为单位矩阵; λ 为矩阵 $\bar{A}$ 的特征值。

通过配置 α'_1 和 α_2 使矩阵满足 Hurwitz 稳定性, 则对于任意对称正定矩阵 $\mathbf{Q}$, 都存在对称正定矩阵 $\mathbf{P}$ 满足式 (31):

$$\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{Q} = 0 \quad (31)$$

定义 Lyapunov 函数如式(32)所示:

$$V = \delta \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta} \quad (32)$$

对 V 求导,并结合式(29)可得:

$$\dot{V} = \delta \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta} + \delta \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\eta}} =$$

$$\begin{aligned}
& [\bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\eta} + \delta\bar{\mathbf{B}}(-\dot{\hat{\mathbf{d}}})]^\top \mathbf{P}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{P}[\bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\eta} + \delta\bar{\mathbf{B}}(-\dot{\hat{\mathbf{d}}})] = \\
& \boldsymbol{\eta}^\top \bar{\mathbf{A}}^\top \mathbf{P}\boldsymbol{\eta} + \delta(-\dot{\hat{\mathbf{B}}})^\top \mathbf{P}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{P}\bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}(-\dot{\hat{\mathbf{d}}}) = \\
& \boldsymbol{\eta}^\top (\bar{\mathbf{A}}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\bar{\mathbf{A}})\boldsymbol{\eta} + 2\delta\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}(-\dot{\hat{\mathbf{d}}}) = \\
& -\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} + 2\delta\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}(-\dot{\hat{\mathbf{d}}}) \leq -\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} + \\
& 2\delta \|\mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}\| \cdot \|\boldsymbol{\eta}\| \cdot |\dot{\hat{\mathbf{d}}}| \quad (33)
\end{aligned}$$

假设 $|\dot{d}| \leq L$, L 为扰动导数的界, 可得:

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \cdot \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 2\delta L \|\mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}\| \cdot \|\boldsymbol{\eta}\| \quad (34)$$

因此,当 $\|\boldsymbol{\eta}\|$ 满足式(35)时, $\dot{V} \leq 0$, 此时观测器稳定, 且 δ 越小, 收敛速度越快, 但 δ 过小会产生高频噪音, 使性能恶化。

$$\|\boldsymbol{\eta}\| \leq \frac{2\delta L \|\mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}\|}{\lambda_{\min}(\mathbf{O})} \quad (35)$$

通过扰动ESO得到 d 后,可由式(22)所示的STSMC的控制律得到考虑负载扰动的 i_q^* ,从而建立基于STSMC-ESO的PMSM FOC系统,如图2所示。

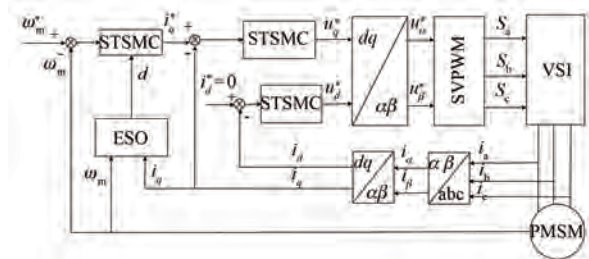


图 2 基于 STSMC-ESO 的 PMSM FOC 系统
Fig.2 PMSM FOC system based on STSMC-ESO

2 性能对比

基于 Matlab/Simulink 建立 SPMSM FOC 系

统仿真模型。SPMSM 参数如表 1 所示。参考转速 n_{ref} 为 1 000 rpm, 初始负载转矩为 0, 0.2 s 时阶跃至 10 N·m, 采样周期为 10 μs , 仿真总时长为 0.4 s。转速 SMC 的转速环采用 SMC 控制器, 其参数为 $c = 62.67$, $\varepsilon = 200$, $k = 1\ 000$; dq 轴电流环采用 PI 控制器, 其参数为 $k_{\text{pd}} = k_{\text{pq}} = 9.35$, $k_{\text{id}} = k_{\text{iq}} = 1\ 053.8$ 。

表 1 SPMSM 参数

Tab. 1 SPMSM parameters

参数名称	参数值
极对数 p	4
定子 d 轴电感/mH	8.5
定子 q 轴电感/mH	8.5
定子电阻 R_s/Ω	0.958
转子磁链 ψ_f/Wb	0.182 7
转动惯量 $J/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.003
粘性摩擦因数 $B/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s})$	0.008

首先,对转速 SMC 控制器和 PI 控制器的性能进行对比。PI 控制器的转速环参数为 $k_p = 0.14, k_i = 0.7$, 其余参数均相同。

基于转速 SMC 和 PI 控制的 SPMSM FOC 系统仿真波形如图 3~图 6 所示。

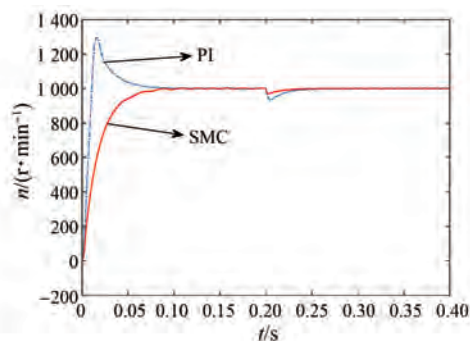


图 3 基于转速 SMC 和 PI 控制的 SPMSM FOC 系统的转速

Fig. 3 Speed of SPMSM FOC system based on speed SMC and PI control

由仿真结果可知,相较于传统 PI 控制,基于转速 SMC 的 SPMSM FOC 系统没有转速超调,且存在负载扰动时的转速跌落较小,鲁棒性较好。由于 SMC 分为趋近运动和滑模运动,其沿滑模面收敛的特性可避免超调量的产生,但也导致动态响应速度较慢。同时,电流环采用 PI 控制也导致电流脉动较大,影响其稳态性能。为了

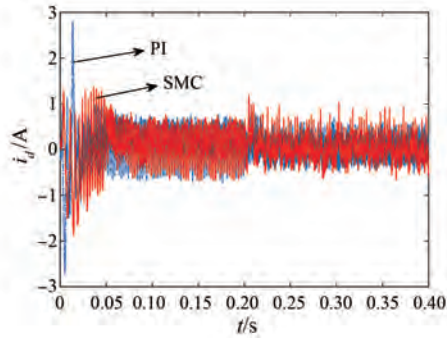


图4 基于转速 SMC 和 PI 控制的 SPMSM FOC 系统的 d 轴电流

Fig. 4 d -axis current of SPMSM FOC system based on speed SMC and PI control

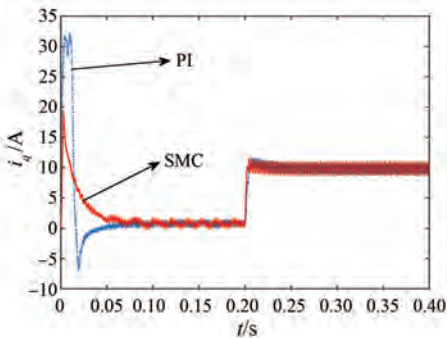


图5 基于转速 SMC 和 PI 控制的 SPMSM FOC 系统的 q 轴电流

Fig. 5 q -axis current of SPMSM FOC system based on speed SMC and PI control

提升响应速度,并降低电流脉动,采用 STSMC 控制器对转速环及定子 dq 轴电流环进行控制。

为了发挥转速环 STSMC 控制器的性能,需对参数 k_1 和 k_2 进行调节。取误差带为 1%,采用调节时间、起动超调量、转速恢复时间及转速跌落来

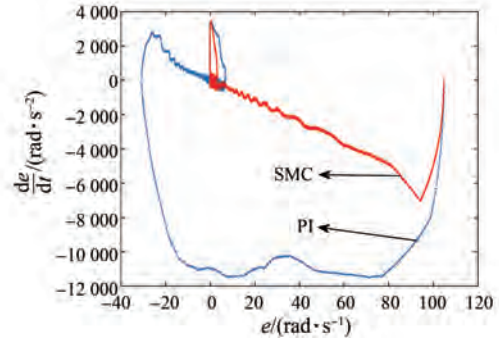


图6 基于转速 SMC 和 PI 控制的 SPMSM FOC 系统的转速环相轨迹

Fig. 6 Speed loop phase trajectory of SPMSM FOC system based on speed SMC and PI control

表征电机系统的动态性能;采用转速脉动均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE) ω_{m_RMSE} 和定子 dq 轴电流脉动 RMSE i_{d_RMSE} 、 i_{q_RMSE} 来表征电机系统的稳态性能,其表达式分别如式(37)~式(39)所示:

$$\omega_{m_RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\omega_m - \omega_m^*)^2}{N}} \quad (37)$$

$$i_{d_RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (i_d - i_d^*)^2}{N}} \quad (38)$$

$$i_{q_RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (i_q - i_q^*)^2}{N}} \quad (39)$$

式中: N 为采样个数。

不同 k_1 和 k_2 下的电机系统性能分别如表 2 和表 3 所示。

表2 不同 k_1 下的电机系统性能

Tab. 2 Motor system performance under different k_1 values

k_1	调节时间/s	起动超调量/%	转速恢复时间/s	转速跌落/%	$\omega_{m_RMSE}/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	i_{d_RMSE}/A	i_{q_RMSE}/A
0.2	0.041	13.79	0.008	3.356	0.024	0.108	0.116
1.1	0.015	0.170	0.003	1.637	0.016	0.119	0.172
1.5	0.013	0.075	0.002	1.412	0.020	0.123	0.238
2	0.012	0.080	0.001	1.290	0.036	0.128	0.408
4	0.012	3.008	0.002	1.552	0.124	0.146	1.414
6	0.011	5.568	0	0.980	0.196	0.151	2.754
10	0.011	6.808	0	0.980	0.363	0.152	6.355
20	0.011	7.302	0	0.980	1.168	0.152	16.23

由表 2 可知, k_1 增大能加快响应速度, 提升抗扰能力, 但是也会增加转速和电流的平均脉动, k_1 大于 2 时抖振加剧超调量显著增加, 稳态性能大幅恶化, 综合考虑选择 $k_1 = 2$ 。由表 3 可知, k_2 增大能提升抗扰性能, 但 k_2 过大会引起超调量, 使性能恶化, 综合考虑, 选择 $k_2 =$

150。同样地, 对电流环 STSMC 控制器参数进行调节, 选择 $k_{1_{i_d}} = k_{1_{i_q}} = 100, k_{2_{i_d}} = k_{2_{i_q}} = 30$ 。

对基于 STSMC 和转速 SMC 的 SPMSM FOC 系统的控制性能进行仿真对比, 结果如图 7 ~ 图 10 所示。

表 3 不同 k_2 下的电机系统性能

Tab. 3 Motor system performance under different k_2 values							
k_2	调节时间/s	起动超调量/%	转速恢复时间/s	转速跌落/%	$\omega_{m_RMSE}/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$	i_{d_RMSE}/A	i_{q_RMSE}/A
1.5	0.012	0.005	0.002	1.466	0.031	0.117	0.198
15	0.012	0.010	0.002	1.450	0.035	0.128	0.403
150	0.012	0.080	0.001	1.290	0.036	0.128	0.408
500	0.011	0.627	0.002	1.450	0.038	0.125	0.408
800	0.011	1.481	0.001	1.370	0.042	0.126	0.429
1 500	0.011	4.190	0.001	1.407	0.046	0.125	0.437

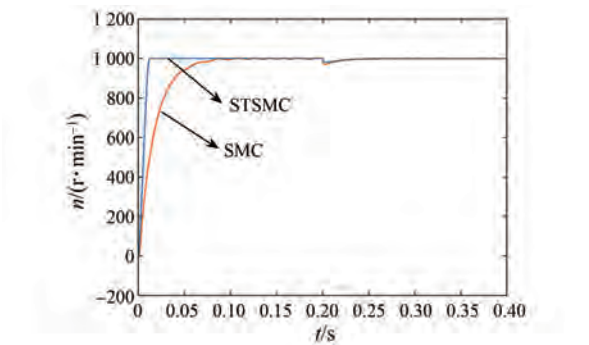


图 7 基于 STSMC 和转速 SMC 的 SPMSM FOC 系统的转速

Fig. 7 Speed of SPMSM FOC system based on STSMC and speed SMC

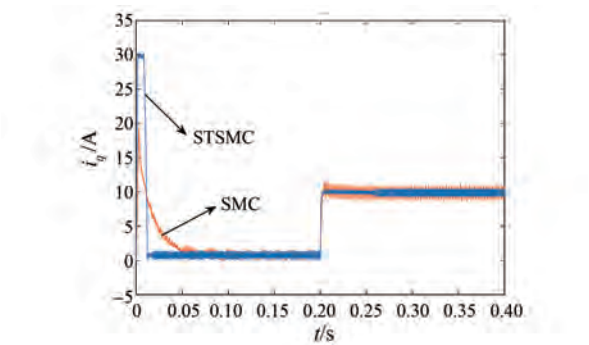


图 9 基于 STSMC 和转速 SMC 的 SPMSM FOC 系统的 q 轴电流

Fig. 9 q -axis current of SPMSM FOC system based on STSMC and speed SMC

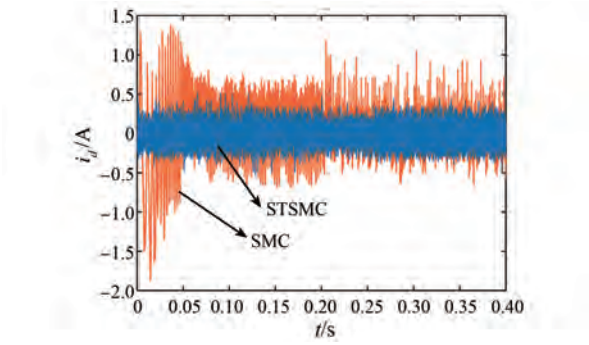


图 8 基于 STSMC 和转速 SMC 的 SPMSM FOC 系统的 d 轴电流

Fig. 8 d -axis current of SPMSM FOC system based on STSMC and speed SMC

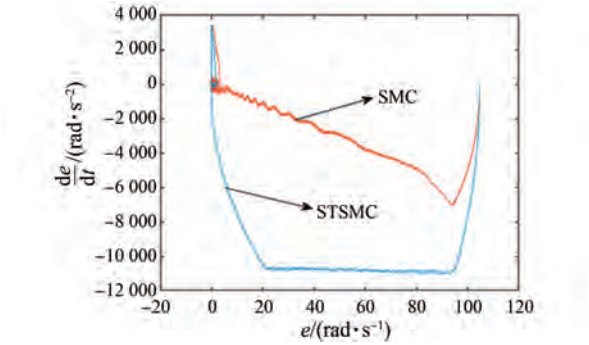


图 10 基于 STSMC 和转速 SMC 的 SPMSM FOC 系统的转速环相轨迹

Fig. 10 Speed loop phase trajectory of SPMSM FOC system based on STSMC and speed SMC

由仿真结果可知,相较于传统 SMC,STSMC 的收敛速度更快,且超调量极小。传统 SMC 的电流环采用 PI 控制器,STSMC 的电流环采用 STSMC 控制器,可见 STSMC 可抑制电流脉动。

突加负载时,基于 STSMC 的 SPMSM FOC 系统转速跌落与恢复时间较长,系统抗扰能力有待提升。为提升系统在扰动下的鲁棒性,设计 ESO 将系统负载扩张为新的状态量,跟踪系统扰动。对 ESO 的参数 α'_1 、 α_2 和 δ 进行设置。参数 α'_1 和 α_2 只需使矩阵满足 Hurwitz 稳定性即可,因此,取 $\alpha'_1 = 15$ 、 $\alpha_2 = 9$ 。为了使 ESO 具有较好的跟踪性能,对带宽参数 δ 进行调节。不同 δ 下的控制性能如表 4 所示。

表 4 不同 δ 下的控制性能Tab. 4 Control performance under different δ values

δ	调节时间/s	超调量/%	稳态误差/%
0.01	0.074 4	0	0.06
0.007 5	0.055 8	0	0.0017
0.005	0.037 2	0	0
0.002 5	0.018 6	0.002 5	0
0.001	0.007 4	0.012 9	0

由表 4 可知, δ 减小可以提升 ESO 对于扰动的趋近速度。当减小到 0.001 时,趋近速度最高,之后继续减小 δ 会产生高频噪音。因此, δ 取值为 0.001。

对基于 STSMC-ESO 和 STSMC 的 SPMSM FOC 系统的控制性能进行仿真对比,结果如图 11 和图 12 所示。

由仿真结果可知,加入扰动 ESO 后,在外界

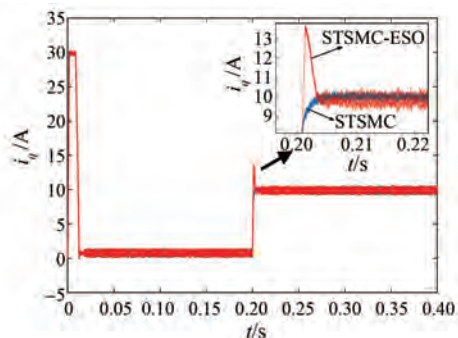
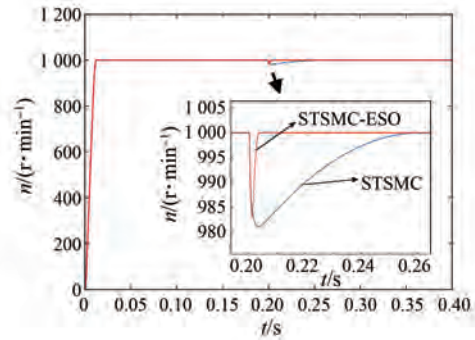
图 11 基于 STSMC-ESO 和 STSMC 的 SPMSM FOC 系统的 q 轴电流Fig. 11 q -axis current of SPMSM FOC system based on STSMC-ESO and STSMC

图 12 基于 STSMC-ESO 和 STSMC 的 SPMSM FOC 系统的转速

Fig. 12 Speed of SPMSM FOC system based on STSMC-ESO and STSMC

负载突变时,可通过前馈电流补偿,使转速迅速恢复,提升系统的鲁棒性。

取转速误差带为 1%,对比 PI 控制、转速 SMC、STSMC 以及 STSMC-ESO 四种控制策略下电机空载起动和突加负载时的动态性能,结果如表 5 所示。

由表 5 可知,STSMC 和 STSMC-ESO 策略下空载起动的调节时间相同,均小于 PI 控制和转速 SMC,且转速 SMC、STSMC 和 STSMC-ESO 均无转速超调,而 PI 控制产生的转速超调量较大;突加负载时,STSMC-ESO 策略下的转速跌落与恢复时间均最小,可见加入扰动 ESO 后系统抗扰能力得以提升。

表 5 动态性能对比

Tab. 5 Comparison of dynamic performance

动态性能	PI 控制	转速 SMC	STSMC	STSMC-ESO
调节时间/s	0.071	0.080	0.011	0.011
起动超调量/%	29.44	0	0	0
转速恢复时间/s	0.035	0.022	0.020	0.002
转速跌落/%	6.42	3.07	1.88	1.47

四种控制策略下,电机的稳态性能对比如表 6 所示。

表 6 稳态性能对比

Tab. 6 Comparison of steady-state performance

稳态性能	PI 控制	转速 SMC	STSMC	STSMC-ESO
ω_m RMSE/(rad·s ⁻¹)	0.727 2	0.816 4	0.038	0.035 1
i_d RMSE/A	0.200 7	0.233 7	0.127 5	0.127 1
i_q RMSE/A	0.534 5	0.638 6	0.419 5	0.402 2

由表 6 可知,PI 控制和转速 SMC 的电流环采用 PI 控制,转速脉动和电流脉动较大。STSMC 和 STSMC-ESO 的电流环采用 STSMC,转速脉动和电流脉动明显减小,稳态性能得到提升。

3 结语

(1) 与 PI 控制相比,转速 SMC 可实现转速无超调,但 SMC 沿滑模面收敛的特性导致动态响应速度较慢,同时由于电流环依然采用 PI 控制,转速脉动和电流脉动较大。

(2) STSMC 沿螺旋状轨迹直接收敛到平衡点,在转速无超调的前提下,大幅减少了转速调节时间,提升了动态性能;同时,电流环采用 STSMC 可有效降低转速脉动和电流脉动,提升系统的稳态性能。相较于转速 SMC,STSMC 的转速调节时间减少 86.25%;转速脉动 RMSE 减小 95.35%, d 轴电流脉动 RMSE 减小 45.44%, q 轴电流脉动 RMSE 减小 34.31%。

(3) STSMC-ESO 可在外界负载突变时,通过前馈电流补偿使转速迅速恢复,提升系统鲁棒性。相较于转速 SMC,STSMC-ESO 的转速调节时间减少 86.25%,转速脉动 RMSE 减小 95.70%, d 轴电流脉动 RMSE 减小 45.61%, q 轴电流脉动 RMSE 减小 37.02%。存在外界负载扰动时,相较于 STSMC,STSMC-ESO 的转速跌落减少 21.81%,转速恢复时间减少 90%。

利益冲突声明

所有作者声明不存在利益冲突。

All authors disclose no relevant conflict of interests.

作者贡献

李耀华进行了方案设计,王自臣,何雨颢进行了仿真编程,曲含章,王禹涵进行了论文撰写,王政钦参与了论文的审核。所有作者均阅读并同意了最终稿件的提交。

The scheme design was carried out by Li Yaohua. The simulation programming was performed by Wang Zichen and He Yuxie. The paper writing was carried out by Qu Hanzhang, Wang Yuhan. The

manuscript was reviewed by Wang Qinzhen. All authors have read and approved the final version of the paper for submission.

参考文献

- [1] 程启明,刘科,张昕,等. 永磁同步电机的复叠式螺旋滑模控制策略研究[J]. 电机与控制学报, 2023, 27(6): 116-126.
CHENG Q M, LIU K, ZHANG X, et al. Research on cascade spiral sliding mode control strategy of permanent magnet synchronous motor [J]. Electric Machines and Control, 2023, 27(6): 116-126.
- [2] LIU C H, LUO Y X. Overview of advanced control strategies for electric machines [J]. Chinese Journal of Electrical Engineering, 2017, 3(2): 53-61.
- [3] SHAO L Y, AHU E H K, DAVIDE T, et al. Design approaches and control strategies for energy-efficient electric machines for electric vehicles-a review [J]. IEEE Access, 2020, 8: 116900-116913.
- [4] 陈勇志,张立嘉,刘旭东. 基于时变扰动观测器的永磁同步电机预设性能滑模控制[J]. 电机与控制应用, 2025, 52(2): 148-158.
CHEN Y Z, ZHANG L J, LIU X D. Preset performance sliding mode control of permanent magnet synchronous motor based on time-varying disturbance observer [J]. Electric Machines & Control Application, 2025, 52(2): 148-158.
- [5] 颌浩浩,吴杞康,鲍久圣,等. 新能源汽车驱动电机技术现状及混合励磁研究进展[J]. 电机与控制应用, 2025, 52(1): 36-51.
XIE H H, WU Q K, BAO J S, et al. Current status of new energy vehicle drive motor technology and research progress on hybrid excitation [J]. Electric Machines & Control Application, 2025, 52(1): 36-51.
- [6] 刘澎澎,王仲根,王珊珊,等. 基于改进双幂次趋近律的 SPMSM 滑模控制[J]. 电机与控制应用, 2025, 52(2): 201-209.
LIU P P, WANG Z G, WANG S S, et al. Sliding mode control of SPMSM using an improved double-power reaching law [J]. Electric Machines & Control Application, 2025, 52(2): 201-209.
- [7] 程梦坤,储剑波. 基于分数阶扩展滑模扰动观测器的 PMSM 无模型控制算法研究[J]. 电机与控制应用, 2024, 51(10): 51-63.
CHENG M K, CHU J B. Research on model-free

- control algorithm for PMSM based on fractional-order extended sliding mode disturbance observer [J]. *Electric Machines & Control Application*, 2024, 51(10): 51-63.
- [8] SADEGH V Z. Control of Permanent Magnet Synchronous Motors [M]. New York City: Oxford University Press, 2018.
- [9] YAN H, YAN Y, CAI Y F, et al. A novel SVPWM scheme for field-oriented vector-controlled PMSM drive system fed by cascaded H-bridge inverter [J]. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2021, 36(8): 8988-9000.
- [10] 李娟, 余尚尚, 陆浩, 等. 基于超螺旋算法的永磁同步电机变结构自抗扰控制设计与验证[J]. *江苏科技大学学报(自然科学版)*, 2023, 37(5): 72-78.
- LI J, YU S S, LU H, et al. Variable structure ADRC for a permanent magnet synchronous motor with super-twisting sliding mode method [J]. *Journal of Jiangsu University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2023, 37(5): 72-78.
- [11] 李敏, 李林林, 周俊鹏. 基于改进型滑模变结构的永磁同步电机的无位置传感器矢量控制[J]. *电机与控制应用*, 2024, 51(2): 22-33.
- LI M, LI L L, ZHOU J P. Sensorless vector control of PMSM based on improved sliding mode with variable structure [J]. *Electric Machines & Control Application*, 2024, 51(2): 22-33.
- [12] 雷子奇, 赵朝会, 顾萍萍, 等. 基于自适应增益的永磁同步电机转速环无模型滑模控制[J]. *电机与控制应用*, 2024, 51(12): 81-92.
- LEI Z Q, ZHAO C H, GU P P, et al. Model-free sliding mode control of permanent magnet synchronous motor speed loop based on adaptive gain [J]. *Electric Machines & Control Application*, 2024, 51(12): 81-92.
- [13] CHEEMA M A M, FLETCHER J E, FARSHADNIA M, et al. Sliding mode based combined speed and direct thrust force control of linear permanent magnet synchronous motors with first-order plus integral sliding condition [J]. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2019, 34(3): 2526-2538.
- [14] 仇志华, 董浩东, 张昊, 等. 变频软启动永磁同步电机低电压穿越能力评估方法[J]. *电力工程技术*, 2022, 41(5): 202-209.
- ZHANG Z H, DONG H D, ZHANG H, et al. Low voltage ride through capability evaluation method for permanent magnet synchronous motor with variable frequency convertor based softly starting [J]. *Electric Power Engineering Technology*, 2022, 41(5): 202-209.
- [15] HOU Q K, DING S H, YU X H, et al. A super-twisting-like fractional controller for SPMSM drive system [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(9): 9376-9384.
- [16] 彭真. 超螺旋滑模控制的永磁同步电机直接转矩控制脉动抑制研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2020.
- PENG Z. Research on pulsation suppression of direct torque control of PMSM controlled by super-twisting sliding mode control [D]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2020.
- [17] 赵峰, 罗雯, 高锋阳, 等. 考虑滑模抖振和扰动补偿的永磁同步电机改进滑模控制[J]. *西安交通大学学报*, 2020, 54(6): 28-35.
- ZHAO F, LUO W, GAO F Y, et al. An improved sliding mode control for PMSM considering sliding mode chattering and disturbance compensation [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2020, 54(6): 28-35.
- [18] 杨城健, 李白雅, 王锦涛, 等. 基于分数阶滑模转速控制器的永磁同步电机矢量控制[J]. *湖南科技大学学报(自然科学版)*, 2022, 37(1): 51-59.
- YANG C J, LI B Y, WANG J T, et al. Vector control of permanent magnet synchronous motor based on fractional order sliding mode speed controller [J]. *Journal of Hu'nan University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2022, 37(1): 51-59.
- [19] 刘兴邦, 付朝阳, 刘铮, 等. 基于扰动补偿和非奇异终端滑模器的永磁同步电机矢量控制[J]. *西北工业大学学报*, 2022, 40(2): 316-322.
- LIU X B, FU C Y, LIU Z, et al. Vector control of PMSM based on disturbance compensation and nonsingular terminal sliding mode [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2022, 40(2): 316-322.
- [20] 张宇祥. 基于超螺旋滑模的永磁同步电机矢量控制研究[D]. 湘潭: 湖南科技大学, 2022.
- ZHANG Y X. Research on vector control of permanent magnet synchronous motor based on super-twisting sliding mode [D]. Xiangtan: Hu'nan

- University of Science and Technology, 2022.
- [21] 李赓. 基于改进超螺旋算法的永磁同步电机速度控制研究[D]. 桂林: 桂林理工大学, 2020.
- LI G. Research on speed control of permanent magnet synchronous motor based on improved super-twisting algorithm [D]. Guilin: Guilin University of Technology, 2020.
- [22] 马雨新, 雷子奇, 顾萍萍, 等. 基于改进型超螺旋滑模线性自抗扰的永磁同步电机速度控制研究[J]. 电机与控制应用, 2024, 51(9): 103-112.
- MA Y X, LEI Z Q, GU P P, et al. Research on PMSM speed control based on improved super-twisting sliding mode linear active disturbance rejection [J]. Electric Machines & Control Application, 2024, 51(9): 103-112.
- [23] 诸德宏, 汪瑶, 周振飞. 基于模糊滑模算法的永磁同步电机无位置传感器矢量控制[J]. 电机与控制应用, 2020, 47(8): 29-35.
- ZHU D H, WANG Y, ZHOU Z F. Position sensorless vector control of PMSM based on fuzzy sliding mode algorithm [J]. Electric Machines & Control Application, 2020, 47(8): 29-35.
- [24] 梁传栋, 许刘超, 潘志恒, 等. 一种改进型滑模变结构控制永磁同步电机直接转矩控制[J]. 电机与控制应用, 2022, 49(3): 1-6+17.
- LIANG C D, XU L C, PAN Z H, et al. An improved sliding mode variable structure control direct torque control for permanent magnet synchronous motor [J]. Electric Machines & Control Application, 2022, 49(3): 1-6+17.
- [25] 宋昱霖, 李洪文, 邓永停. 永磁同步电机快速超螺旋滑模控制[J]. 控制工程, 2023, 30(1): 62-69.
- SONG Y L, LI H W, DENG Y T. Fast super twisting sliding mode control of permanent magnet synchronous motor [J]. Control Engineering of China, 2023, 30(1): 62-69.
- [26] 赵凯辉, 刘文昌, 刘智诚, 等. 一种永磁同步电机无模型高阶滑模控制算法[J]. 电工技术学报, 2023, 38(6): 1472-1485.
- ZHAO K H, LIU W C, LIU Z C, et al. Model-free high sliding mode control for permanent magnet synchronous motor [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2023, 38(6): 1472-1485.
- [27] 张庆超, 马瑞卿, 皇甫宜耿, 等. 电机转速环节 Super-Twisting 算法二阶滑模控制律设计与研究[J]. 西北工业大学学报, 2016, 34(4): 669-676.
- ZHANG Q C, MA R Q, HUANGFU Y G, et al. Second-order sliding mode control based on super-twisting algorithm for the speed outer loop of motors [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2016, 34(4): 669-676.

收稿日期:2025-01-11

收到修改稿日期:2025-03-11

作者简介:

李耀华(1980-),男,博士,副教授,研究方向为新能源汽车电机电控,nuaaliyaohua@126.com;

*通信作者:李耀华(1980-),男,博士,副教授,研究方向为新能源汽车电机电控,nuaaliyaohua@126.com。

附录

依据参考文献对以下结构进行稳定性证明。

$$\dot{s} = \dot{x} = -k_{1d}|s|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s) - k_{2d}\int \text{sign}(s)dt - \gamma s + f(t) \quad (1)$$

式中: $k_{1d} = bk_{1}$, $b = 1.5pf/J$; $k_{2d} = bk_{2}$; $\gamma = -a$, $a = -B/J$; $f(t) = \dot{\omega}_m^* - a\omega_m^* + d$, $d = TL/J$ 。

令 $\varphi = f(t)$, 采用变量代换可得:

$$\begin{cases} z_1 = s \\ z_2 = -\int k_{2d}\text{sign}(z_1)dt + \varphi \end{cases} \quad (2)$$

由式(2)可得:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -k_{1d}|z_1|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(z_1) - \gamma z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = -k_{2d}\text{sign}(z_1) + \varphi \end{cases} \quad (3)$$

因此,控制律的稳定性分析问题就转化为系统的平衡点正定问题。

选取 Lyapunov 函数如式(4)所示:

$$V(z) = V(z_1, z_2) = \xi^T \Pi \xi \quad (4)$$

式中: $\xi^T = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] = [|z_1|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(z_1), z_1, z_2]$; Π

$$\text{为实对称正定矩阵, } \Pi = \begin{bmatrix} 4k_{2d} + k_{1d}^2 & k_{1d}\gamma & -k_{1d} \\ k_{1d}\gamma & \gamma^2 & -\gamma \\ -k_{1d} & -\gamma & 2 \end{bmatrix}。$$

$V(z)$ 为连续正定函数,除集合 $\{z_1 = s = 0\}$ 外处处可微,对 V 沿系统轨迹求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} = \xi^T \Pi \dot{\xi} + \dot{\xi}^T \Pi \xi = \frac{1}{2} \frac{1}{|\xi_1|} (\xi^T A^T \Pi \xi + \xi^T \Pi A \xi + \rho C^T \Pi \xi + \rho \xi^T \Pi C) + \xi^T (B^T \Pi + \Pi B) \xi \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{式中: } A = \begin{bmatrix} -k_{1d} & -\gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2k_{2d} & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -k_{1d} & -\gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1]^T; \rho = 2|z_1|^{\frac{1}{2}}\dot{\varphi} = 2|\xi_1|\dot{\varphi}。$$

由于 ρ 是标量, $C^T \Pi \xi$ 和 $\xi^T \Pi C$ 也为标量,并且 $\Pi = \Pi^T$, 可得:

$$C^T \Pi \xi = (C^T \Pi \xi)^T = \xi^T \Pi^T (C^T)^T = \xi^T \Pi C \quad (6)$$

令 $m = C^T \Pi \xi = \xi^T \Pi C$, 则 $m^2 = \xi^T \Pi C C^T \Pi \xi$, 根据不等式 $(m - \rho)^2 = m^2 - 2m\rho + \rho^2 \geq 0$, $\forall m, \rho \in \mathbf{R}$, 可得:

$$\xi^T \Pi C C^T \Pi \xi \geq \rho \xi^T \Pi C + \rho C^T \Pi \xi - \rho^2 \quad (7)$$

假设 φ Lipschitz 连续, 对于 $\forall t \geq 0$, 有 $2|\dot{\varphi}| \leq \sigma$, $\sigma \in \mathbf{R}^+$, 根据 $\rho = 2|z_1|^{\frac{1}{2}}\dot{\varphi} = 2|\xi_1|\dot{\varphi}$, 可知 $\sigma^2 \xi_1^2 - \rho^2 \geq 0$ 。由于 $\sigma^2 \xi_1^2 = \sigma^2 \xi^T D^T D \xi$, $D = [1 \quad 0 \quad 0]$, 可得:

$$\begin{aligned} \xi^T A^T \Pi \xi + \xi^T \Pi A \xi + \rho C^T \Pi \xi + \rho \xi^T \Pi C \leq \xi^T (A^T \Pi + \Pi A + \sigma^2 D^T D) \xi + (\rho C^T \Pi \xi + \rho \xi^T \Pi C - \rho^2) \leq \xi^T (A^T \Pi + \Pi A + \sigma^2 D^T D + \Pi C C^T \Pi) \xi \end{aligned} \quad (8)$$

结合式(5)可得:

$$\dot{V} \leq$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{|\xi_1|} \xi^T (A^T \Pi + \Pi A + \sigma^2 D^T D + \Pi C C^T \Pi) \xi + \xi^T (B^T \Pi + \Pi B) \xi = -\frac{1}{2} \frac{1}{|\xi_1|} \xi^T Q_1 \xi - \xi^T Q_2 \xi - \xi^T Q_3 \xi = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{式中: } \dot{V}_1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{|\xi_1|} \xi^T Q_1 \xi; \dot{V}_2 = -\xi^T Q_2 \xi; \dot{V}_3 =$$

$$\begin{aligned} -\xi^T Q_3 \xi; \quad Q_1 &= \begin{bmatrix} 2k_{1d}^3 + 4k_{1d}k_{2d} - k_{1d}^2 - \sigma^2 & 0 & -2k_{1d}^2 + 2k_{1d} \\ 0 & 10k_{1d}\gamma^2 - \gamma^2 & 2\gamma \\ -2k_{1d}^2 + 2k_{1d} & 2\gamma & 2k_{1d} - 4 \end{bmatrix}; \\ Q_2 &= \begin{bmatrix} 4k_{1d}^2\gamma + 2\gamma k_{2d} - k_{1d}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma \end{bmatrix}; \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3k_{1d}\gamma \\ 0 & 0 & -2\gamma^2 \\ -3k_{1d}\gamma & -2\gamma^2 & 0 \end{bmatrix}。 \end{aligned}$$

对于 $\dot{V}_1$, 当 Q_1 为正定矩阵时, 可得:

$$\dot{V}_1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{|\xi_1|} \xi^T Q_1 \xi < 0 \quad (10)$$

根据 Schur 补定理, 可推出 Q_1 为正定矩阵的一个充分条件如式(11)所示:

$$\begin{cases} k_{1d} > 2.1 \\ k_{2d} > \frac{10k_{1d}^3 + 10k_{1d}\sigma^2 + 3k_{1d}^2 - 21\sigma^2 - 2k_{1d}}{4k_{1d}(10k_{1d} - 21)} \end{cases} \quad (11)$$

对于 $\dot{V}_2$, 分析 Q_2 可知, 由于 γ 实际为系统参数, 并且 $\gamma = B/J > 0$, 当参数满足式(12)时, Q_2

正定。此时, $\dot{V}_2 = -\xi^T Q_2 \xi < 0$ 。

$$k_{2d} > \frac{k_{1d}(1 - 4k_{1d})}{2}, k_{1d} > 0 \quad (12)$$

对于 $\dot{V}_3$, 计算并展开 $\dot{V}_3$ 可得:

$$\dot{V}_3 = 3k_{1d}\gamma\xi_1\xi_3 + 2\gamma^2\xi_2\xi_3 + 3k_{1d}\gamma\xi_3\xi_1 + 2\gamma^2\xi_3\xi_2 \quad (13)$$

$$\begin{cases} \xi_1\xi_3 = |z_1|^{\frac{1}{2}} \int [-k_{1d} + \text{sign}(z_1)\dot{\varphi}] dt \\ \xi_2\xi_3 = |z_1| \int [-k_{1d} + \text{sign}(z_1)\dot{\varphi}] dt \end{cases} \quad (14)$$

对于式(13), 由于 $\gamma = B/J > 0$, 根据 STSMC 中 $k_{2d} > 0$ 的要求及假设条件 $0 \leq |\dot{\varphi}| \leq \frac{\sigma}{2}$, 进一步分

析可知, 在所有 $\begin{cases} z_1 > 0 \\ \dot{\varphi} < 0 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} z_1 < 0 \\ \dot{\varphi} < 0 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} z_1 > 0 \\ \dot{\varphi} > 0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} z_1 < 0 \\ \dot{\varphi} > 0 \end{cases}$ 四种条件下, 只要 $k_{2d} > \sigma/2$, 就有 $-k_{2d} + \text{sign}(z_1)\dot{\varphi} < 0$, 即在 $k_{2d} > \sigma/2$ 的条件下, $\xi_1\xi_3 < 0$ 、 $\xi_2\xi_3 < 0$ 。

因此, 当参数满足式(15)时, 根据式(13)可得出式(16):

$$k_{2d} > \frac{\sigma}{2}, k_{1d} > 0 \quad (15)$$

$$\dot{V}_3 = -\xi^T Q_3 \xi < 0 \quad (16)$$

综合式(5)~式(16)可知, 系统控制参数应满足式(17):

$$\begin{cases} k_{1d} > 2.1 \\ k_{2d} > \max \left\{ \frac{10k_{1d}^3 + 10k_{1d}\sigma^2 + 3k_{1d}^2 - 21\sigma^2 - 2k_{1d}}{4k_{1d}(10k_{1d} - 21)}, \frac{\sigma}{2} \right\} \end{cases} \quad (17)$$

在此条件下对式(4)沿系统轨迹求导可得式(18), 系统稳定。

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \frac{1}{|\xi_1|} \xi^T Q_1 \xi - \xi^T Q_2 \xi - \xi^T Q_3 \xi < 0 \quad (18)$$