

一种改进的感应电机离散化模型^{*}

詹 榕¹, 李 杰², 宋文祥¹

(1. 上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 200072;

2. 上海开放大学 理工学院, 上海 200433)

摘 要: 研究了一种基于不同坐标系下的离散化模型。根据电机静止坐标系下的定子方程与转子坐标系下的转子方程, 以定子磁链和转子磁链为状态变量, 设计离散化矩阵实现磁链信息的估计。混合离散模型的稳定性可由离散域稳定性定理保证, 离散模型的极点轨迹存在于稳定区域内, 实现了全速度区域内的模型稳定。最后通过系统仿真, 验证了离散模型的正确性。

关键词: 感应电机; 离散化模型; 一阶欧拉离散化; 极点

中图分类号: TM 346 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-6540(2018)03-0085-05

Improved Discrete Model of Induction Motor^{*}

ZHAN Rong¹, LI Jie², SONG Wenxiang¹

(1. School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200072, China;

2. School of Science and engineering, Shanghai Open University, Shanghai 200433, China)

Abstract: Aiming at the limitations of the discrete model of the induction motor using first-order Euler with full speed range, the model was unstable in high speed regional, an model based on different reference frame was studied. The model was based on the rotor equation in the rotor reference frame and the stator equation in the stationary reference frame, and use the stator flux and the rotor flux as the state variable to design the discrete matrix to realize the estimation of flux. The stability of the hybrid discrete model can be proved by the stability theory of discrete domain. The root locus plot of the discrete model was in the stable region to achieve stability within the whole-speed range. The model was verified by MATLAB.

Key words: induction motor; discretization; first-order euler discrete; poles

0 引 言

对于感应电机高性能控制, 转子磁场定向控制与直接转矩控制都需要精确的观测模型来观测磁链等关键参数用于闭环控制。状态观测模型加上对应的信号反馈, 转化为闭环状态观测模型, 实现对状态变量的观测, 并根据状态变量的估算误差和状态变量的估计值自适应辨识出电机的实际转速或者定子电阻等参数^[1]。但是对于这些状态观测器, 以及在状态空间中的参数估计, 需要考虑一个至关重要的状态空间模型。通常, 这个过程

在时间上是连续的, 但是状态观测器或参数估计器一般建立在数字信号处理系统上, 处于离散时间内, 因此所需要建立的状态模型必须是离散时间模型。在线性系统的情况下, 转换矩阵给出了这个问题的一般解决方案, 但是转换矩阵需要大量的数值计算^[2]。如果可以实现, 这些计算应该离线完成, 但对于线性时变系统, 该方法往往不适用。在所有这些情况下, 还要使用具有相对较小计算能力的微处理器系统在线计算转换矩阵, 通常系统也无法实现。

因此, 不使用“精确”离散化, 而使用近似离

^{*} 基金项目: 国家自然科学基金项目(51377102)

作者简介: 詹 榕(1993—), 女, 硕士研究生, 研究方向为电力电子变换与电机驱动技术。

李 杰(1973—), 男, 博士, 讲师, 研究方向为电力电子变换与电机驱动技术。

散方法。在各种数值积分算法中^[3],一阶欧拉离散算法经常在文献中出现^[4-7]。计算过程简单,计算量较小,易于实现。

针对感应电机模型,文献[8]中发现了一阶前向欧拉离散电机观测模型的高速区域不稳定现象,然后将离散模型的状态矩阵分化为时变矩阵和常数矩阵,提出了一种解决方案,其中只有时变矩阵离散了。该方案提高了离散模型的精确度和稳定性,但需要大量的三角函数计算,比较复杂。文献[4]提出一种分段离散化方法,中低速选择一阶精度的前向欧拉法的全阶状态观测器观测,高速及弱磁区域选择二阶精度离散的全阶状态观测器,以保证高速区域稳定。但是没有实质分析一阶欧拉离散化在高速区域出现的不稳定现象,同时两者之间的切换也需要特别考虑。文献[5]通过将一阶欧拉离散法和双线性变换法相结合,对定子电流采用一阶欧拉法离散化,对转子磁链进行双线性离散化,取得了较小的离散误差,计算量因采用双线性离散略有增加,但是缺少对一阶欧拉法离散模型不稳定原因的分析。

本文针对感应电机一阶欧拉离散模型的局限性,通过统一一阶欧拉感应电机离散模型与混合离散模型的极点轨迹,分析传统模型高速区域不稳定的实质原因,并从极点方面着手,提出了基于静止坐标系和转子坐标系下的优化感应电机离散模型。最后使用 MATLAB 对两种离散模型进行了仿真验证对比。

1 感应电机离散化模型

感应电机的动态数学模型是一个高阶、非线性、强耦合的多变量系统^[9],考虑标量表示的数学模型十分复杂,使用复矢量表示方法^[10]。1995年,德国学者 Holtz 教授将复矢量与信号流图相结合,并且首次应用于交流电机建模中^[11]。在建模方法中引入复矢量的概念,不仅可以简化电机模型表达式,还能将多变量系统简化为单变量系统,使得古典控制理论分析手段,如根轨迹、伯德图等可用于交流传动系统分析中。

在两相静止参考坐标系下,根据感应电机磁链方程、电压方程^[9],选择定子磁链和转子磁链作为状态变量,推导得到感应电机矢量形式状态方程:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_s \\ \psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + ja'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_s \\ \psi_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_s \quad (1)$$

$$i_s = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_s \\ \psi_r \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: ψ_s ——定子磁链, $\psi_s = \psi_{s\alpha} + j\psi_{s\beta}$;

ψ_r ——转子磁链, $\psi_r = \psi_{r\alpha} + j\psi_{r\beta}$;

u_s ——定子电压, $u_s = u_{s\alpha} + ju_{s\beta}$;

i_s ——定子电流, $i_s = i_{s\alpha} + ji_{s\beta}$,

$$\text{其中, } a_{11} = -\frac{1}{\tau'_s}; a_{12} = \frac{k_r}{\tau'_s}; a_{21} = \frac{k_s}{\tau'_r}; a_{22} = -\frac{1}{\tau'_r};$$

$$a'_{22} = \omega_r; c_1 = \frac{1}{\sigma L_s}; c_2 = -\frac{L_m}{\sigma L_s L_r}; \tau'_s = \frac{\sigma L_s}{R_s}; \tau'_r = \frac{\sigma L_r}{R_r};$$

$$\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}; k_r = \frac{L_m}{L_r}; k_s = \frac{L_m}{L_s}.$$

式中: R_s, R_r ——定子电阻和转子电阻;

L_s, L_r, L_m ——定子电感、转子电感和互感;

ω_r ——转子角频率。

状态矩阵 A 、矩阵 B 为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + ja'_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

将连续域的状态方程(1)离散化,得到感应电机离散状态方程

$$x[(k+1)T] = \Phi x[kT] + Hu(kT) \quad (5)$$

其中, T 为数字信号处理器的采样时间,对应的离散状态矩阵为

$$\Phi = e^{AT} \quad (6)$$

$$H = B \int_0^T e^{A(T-t)} dt \quad (7)$$

其中状态矩阵 A 的幂指数函数 e^{AT} 的麦克劳林级数展开式为

$$e^{AT} = I + AT + \frac{1}{2!} A^2 T^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k T^k + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n T^n}{n!} \approx \sum_{L=0}^L \frac{A^L T^L}{L!} \quad (8)$$

同时,

$$H = B \left(T + \frac{1}{2!} AT^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^{k-1} T^k + \dots \right) \approx B \sum_{L=1}^L \frac{A^{L-1} T^L}{L!} \quad (9)$$

其中, $L(L \geq 1)$ 为离散的阶数, L 值越大, 离散模型越精确, 同时给信号处理器系统带来高的计算负荷。

由以上分析可知道, 离散模型的“精确”状态矩阵为式(6)和式(7)。对于各种离散化方法, 例如一阶欧拉离散法、二阶梯形法和三阶龙格-库塔法, 都是对这个指数函数的近似处理^[4], 因此感应电机离散模型的离散精度可直接由离散化近似处理后的状态矩阵与矩阵幂指数函数 e^{AT} 的近似程度决定。

2 传统一阶欧拉离散化模型的局限性

对于一阶欧拉离散方法, 离散状态矩阵中 L 取 1, 那么离散模型状态矩阵为

$$\Phi \approx I + AT = \begin{bmatrix} 1 + a_{11}T & a_{12}T \\ a_{21}T & 1 + (a_{22} + ja'_{22})T \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$H \approx TB = [T \ 0]^T \quad (11)$$

根据离散状态矩阵 Φ 和特征值方程 $(\lambda I - \Phi) = 0$, 可求得离散状态方程的极点。以定子磁链和转子磁链为状态变量的感应电机一阶欧拉离散模型极点轨迹如图 1 所示 ($0 \leq f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} \leq$

160 Hz)。其中 z 域下的稳定限制条件为极点轨迹必须在单位圆内, 即极点的模要小于 1^[12]。由图 1 可见, 随着转速的上升, 极点轨迹超出了稳定圆区域, 进入到不稳定区域, 表明感应电机一阶欧拉离散模型在高速区域会出现不稳定发散的现象; 而且进入不稳定区域的转速临界点和离散采样时间 T 有很大的关系, T 越大, 临界转子角频率越小。

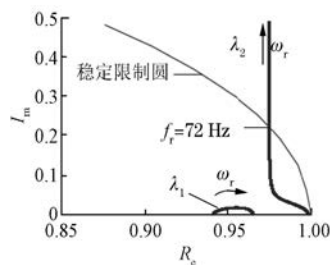


图 1 一阶欧拉离散极点轨迹图

对于二阶精度离散化方法来说, 离散状态矩阵 L 取 2, 那么感应电机离散模型状态矩阵为

$$\Phi \approx I + AT + \frac{1}{2!} A^2 T^2 = \begin{bmatrix} 1 + a_{11}T & a_{12}T \\ a_{21}T & 1 + (a_{22} + ja'_{22})T \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + ja'_{22} \end{bmatrix}^2 T^2 \quad (12)$$

同理, 根据状态矩阵可求得二阶精度离散模型极点轨迹如图 2 所示。全速范围都处于稳定区域, 没有出现一阶欧拉离散方法高速范围进入不稳定区域的现象。但鉴于一阶欧拉离散化方法计算量更小, 使用更加广泛, 本文工作主要围绕一阶欧拉法离散化进行。

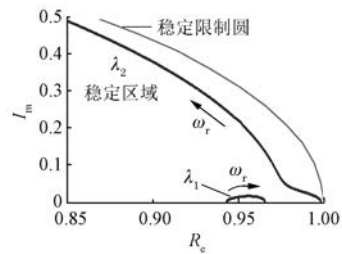


图 2 二阶梯形法离散极点轨迹图

3 改进的感应电机离散化模型设计

改进的感应电机离散化模型设计目的在于寻找一种能够在高速情况下稳定和计算量合理的方法。针对第 2 节提到的以定子磁链、转子磁链为状态变量的感应电机离散化模型, 可知在转子坐标系或者定子坐标系下, 当电机转速超过一定范围时, 电机极点将超出稳定区域, 引起高速区模型的不稳定。

为了解决这个问题, 结合定子坐标系和转子坐标系的情况, 分别选择定子坐标系下的定子磁链、转子坐标系下的转子磁链作为状态变量, 得到混合坐标系下的状态方程:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_s^s &= a_{11} \psi_s^s + a_{12} \psi_r^s + u_s \\ \frac{d}{dt} \psi_r^r &= a_{21} \psi_s^r + a_{22} \psi_r^r \end{aligned} \quad (13)$$

上标“s”和“r”分别表示定子坐标系下的变量和转子坐标系下的变量的标志。对式(13)连续域下的状态方程, 采用一阶欧拉离散方法转化为离散域状态方程:

$$\begin{aligned}\psi_s^s[(k+1)T] - \psi_s^s(kT) &= \\ T[a_{11}\psi_s^s(kT) + a_{12}\psi_r^s(kT) + u_s(kT)] \\ \psi_r^r[(k+1)T] - \psi_r^r(kT) &= \\ T[a_{21}\psi_s^r(kT) + a_{22}\psi_r^r(kT)]\end{aligned}\quad (14)$$

在分析离散模型时,为了更简便的分析,我们可将转子坐标系下的转子磁链转换至定子坐标系下的转子磁链进行表示^[13]。两相静止旋转转换公式为

$$x'(k) = e^{-j\theta(k)} x^s(k) \quad (15)$$

$$\theta(k+1) = \theta(k) + T\omega_r(k) \quad (16)$$

根据式(14)、式(15)及式(16)得到改进的感应电机一阶欧拉离散模型:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \psi_s^s(k+1) \\ \psi_r^s(k+1) \end{bmatrix} &= \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 + a_{11}T & a_{12}T \\ e^{jT\omega_r(k)} a_{21}T & e^{jT\omega_r(k)} (1 + a_{22}T) \end{bmatrix}}_{\Phi} \begin{bmatrix} \psi_s^s(k) \\ \psi_r^s(k) \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} u_s(k)\end{aligned}\quad (17)$$

转换后根据离散状态矩阵 Φ , 通过 MATLAB 可画出如图 3 所示的离散极点轨迹图, 可以看到在全速度范围内极点都处于稳定区域内。这就解决了感应电机传统一阶欧拉离散模型的高速区域不稳定问题。进一步可以发现相对于静止坐标系下式(10)所给出的离散模型状态矩阵而言, 促使混合坐标系下极点轨迹不一样的主要原因在于, 式(17)的状态矩阵存在 $e^{jT\omega_r(k)}$ 分量, 从而使得状态矩阵为

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 + a_{11}T & a_{12}T \\ E & F \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\text{其中, } E &= a_{21}T + ja_{21}\omega_r T^2 + \dots + \frac{1}{k!} \\ &(\jmath\omega_r)^k T^{k+1} + \dots; F = 1 + (a_{22} + \jmath\omega_r)T + \\ &\left[ja_{22}\omega_r + \frac{1}{2!}(\jmath\omega_r)^2 \right] T^2 + \dots + \\ &\left[a_{22} \frac{1}{k!}(\jmath\omega_r)^k + \frac{1}{(k+1)!}(\jmath\omega_r)^{k+1} \right] T^{k+1} + \dots\end{aligned}$$

矩阵第二行元素具有二阶以上的因子, 相对传统一阶欧拉离散方法来说, 离散精度更高, 更接近式(6)的离散状态矩阵。

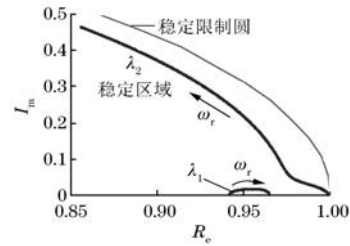


图3 改进的感应电机离散模型极点轨迹

4 仿真结果及分析

本文基于 MATLAB/Simulink, 采用模块化的方法实现了对上文提出的改进感应电机离散模型的验证。仿真模型所采用电机参数如表 1 所示, 控制周期 T 设置为 0.5 ms。

表 1 感应电机参数

参数名称	参数值	参数名称	参数值
P_e/kW	4	R_s/Ω	1.087
I_e/A	8.5	R_r/Ω	0.788
U_e/V	380	L_m/H	0.140
f_e/Hz	50	L_r/H	0.148
$T_e/(\text{N}\cdot\text{m})$	25	L_s/H	0.148
$n_e/(\text{r}\cdot\text{min}^{-1})$	1 460	p	2

图 4 给出了在不同转速下的感应电机传统一阶欧拉离散模型的转子磁链分量 ψ_{rx} 的仿真波形和实际转子磁链分量的对比。可以看出传统一阶欧拉离散模型, 随着转速上升转子磁链模型值与实际值之间的幅值和相位差异逐渐增大, 并且在转速为 2 250 r/min (75 Hz) 时, 转子磁链模型值发散。

图 5 为改进的感应电机离散模型的转子磁链分量 ψ_{rx} 波形与实际转子磁链分量的对比。与传统的一阶欧拉离散模型相比, 在相同的运行情况下, 改进的感应电机离散模型转子磁链值和实际值能够较好的吻合, 并且在高速区域没有出现转子磁链值发散的现象, 验证了改进模型的有效性。

5 结 语

本文针对感应电机传统一阶欧拉离散模型存在的一些局限性, 通过深入分析极点位置, 提出一种基于定子坐标系和转子坐标系下的改进感应电机模型离散化方法, 能够实现全速度范围的模型

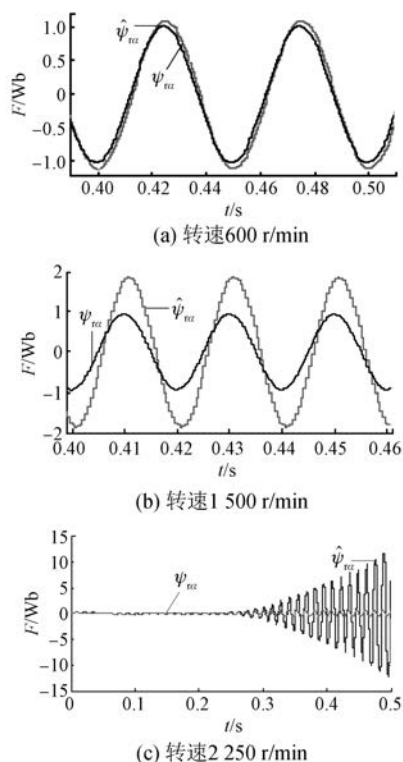


图4 传统的感应电机一阶欧拉离散模型的转子磁链

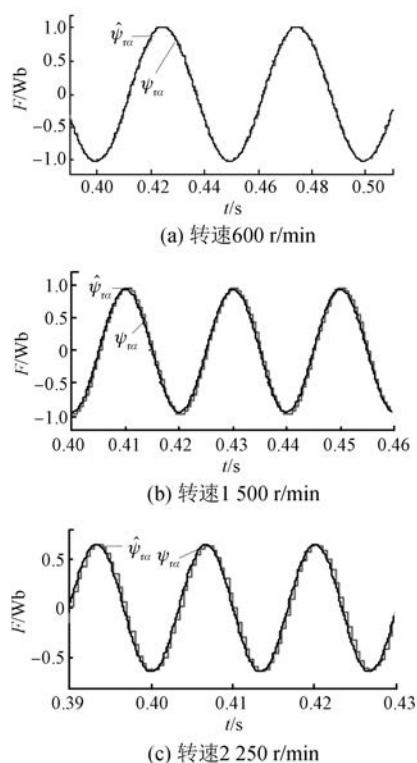


图5 改进的感应电机一阶欧拉离散模型的转子磁链

稳定工作,并且相对于更高阶精度的离散化模型,

计算量较小,可有效应用于感应电机模型离散化。仿真结果表明,所提出的混合坐标系下的改进的感应电机离散模型在低速与高速情况下模型估计值与实际值的幅值和相位都相吻合,没有出现发散现象,从而验证了方案的有效性。

【参考文献】

- [1] HOLTZ J, OIKONOMOU N. Fast dynamic control of medium voltage drives operating at very low switching frequency—an overview [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2008, 55(3): 1005-1013.
- [2] 曹永岩. 现代控制理论的工程应用[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2000.
- [3] 宋文祥, 周杰, 尹赞. 感应电机转速自适应全阶磁链观测器的离散化[J]. 上海大学学报(自然科学版), 2012, 18(6): 582-588.
- [4] 罗慧. 感应电机全阶磁链观测器和转速估算方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2009.
- [5] 凌光, 王斯然, 陈斌, 等. 感应电机全阶观测器的一种新型离散方法[J]. 电力电子技术, 2012, 46(4): 78-81.
- [6] 吴文进, 苏建徽, 刘鹏, 等. 感应电机全阶磁链观测器设计及其控制性能对比分析[J]. 电机与控制学报, 2016, 20(4): 78-83.
- [7] 周杰, 宋文祥, 尹赞. 感应电机全阶磁链观测器矢量控制系统的离散化仿真[J]. 电机与控制应用, 2012, 39(1): 16-21.
- [8] BOTTURA C P, SILVINO J L, DE RESENDE P. A flux observer for induction machines based on a time-variant discrete model[J]. Industry Applications IEEE Transactions on, 1993, 29(2): 349-354.
- [9] 陈伯时. 电力拖动自动控制系统: 运动控制系统[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010.
- [10] LYON W V. Transient analysis of alternating current machinery[M]. New York: The Technology Press, 1954.
- [11] HOLTZ J. Representation of AC machine dynamics by complex signal flow graphs[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1995, 42(3): 263-271.
- [12] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2001.
- [13] DIAO L J, SUN D N, DONG K, et al. Optimized design of discrete traction induction motor model at low-switching frequency[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2013, 28(10): 4803-4810.

收稿日期: 2017-07-10