

基于混合有限元解析法的永磁同步电机 永磁体电涡流损耗估计*

冯页帆¹, 王天真¹, 谢卫¹, Huu Kien BUI², Nicolas BERNARD²

(1. 上海海事大学 物流工程学院, 上海 201306;

2. 法国南特大学 综合理工学院, 法国 圣纳泽尔 44600)

摘要: 永磁同步电机永磁体受限于热约束, 无法在温度较高的环境下运行, 故需减少永磁体上的电涡流损耗, 从而降低永磁体上的温度。针对使用有限元法对永磁体电涡流损耗估算时间较长, 以及使用解析法估算时难以达到与有限元法相同的精度, 采用混合有限元解析法估算永磁体上的电涡流损耗。结合电涡流的反作用, 在模拟电机旋转时, 无需重复划分三角形区域; 使用 MATLAB 软件仿真模拟, 将混合有限元解析法与 Galerkin 有限元法对比, 减少三角形区域划分的个数。由此验证了永磁体上电涡流损耗符合端部效应以及集肤效应的特征, 在保证精度的同时, 减少了仿真的时间。

关键词: 永磁同步电机; 混合有限元解析法; 电涡流损耗; 仿真时间

中图分类号: TM351 文献标志码: A 文章编号: 1673-6540(2019)05-0001-10

Estimation of Permanent Magnet Eddy Current Losses in Permanent Magnet Synchronous Motor Based on Hybrid Analytical-FEM*

FENG Yefan¹, WANG Tianzhen¹, XIE Wei¹, Huu Kien BUI², Nicolas BERNARD²

(1. Logistics Engineering College, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China;

2. Polytech Nantes, Université de Nantes, S.Nazaire 44600, France)

Abstract: Permanent magnet of permanent magnet synchronous motor was limited by the thermal constraints and could not operate in high temperature environment. Therefore, it was necessary to reduce the eddy current loss on permanent magnet so as to lower the temperature on permanent magnet. In view of the long calculation time of the eddy current loss estimation of permanent magnets by finite element method (FEM) and the difficulty of achieving the same accuracy as the FEM when using the analytical method, the hybrid analytical-FEM to estimate the eddy current loss of permanent magnets was adopted, and the reaction field of eddy current was taken into account. When simulating the rotation of motors, there was no need to repeat the triangle mesh division. By using MATLAB software, the hybrid analytical-FEM was compared with the Galerkin FEM, which reduced the number of triangles. The characteristic of the end effect and the skin effect of the eddy current losses on the permanent magnet were validated. The hybrid analytical-FEM could ensure the accuracy and reduce the simulation time.

Key words: permanent magnet synchronous motor (PMSM); hybrid analytical-FEM; eddy current loss; simulation time

* 基金项目: 国家自然科学基金项目(61673260); 上海市自然科学基金项目(16ZR1414300)

作者简介: 冯页帆(1994—), 男, 硕士研究生, 研究方向为智能信息处理与检测技术、电机分析。

王天真(1978—), 女, 教授, 博导, 研究方向为故障检测与诊断、智能信息处理。

谢卫(1965—), 男, 博士, 教授, 博导, 研究方向为电力电子与电力传动、电磁装置的数值分析与优化设计、船舶电力推进系统。

0 引言

永磁同步电机(PMSM)具有效率高、转速范围宽、体积小、重量轻、功率密度大、成本低等优点,被广泛使用^[1]。PMSM按永磁体在转子上的位置可分为2种:内置式永磁同步电机(IPMSM)和表贴式永磁同步电机(SPM SM)^[2]。目前使用最广泛的稀土永磁材料为钕铁硼材料(NdFeB)。NdFeB具有优秀的磁性性能,由该材料制作的永磁体已被广泛应用于PMSM^[3]。对于永磁体,如果周围的磁场发生变化,永磁体上会产生电涡流,造成电涡流损耗。电涡流损耗过大会使永磁体温度上升,温度上升超过极限将导致退磁,对于整机非常危险,所以准确估算永磁体电涡流损耗以防止永磁体退磁显得尤为重要^[4-6]。

永磁体的电涡流损耗较多是由有限元法(FEM)或者解析法计算。文献[7]使用等效电阻法计算电涡流损耗,考虑了集肤效应,但忽略了空间谐波以及电涡流的反作用。文献[8]结合麦克斯韦方程与电网络计算电涡流损耗,将电涡流的反作用和集肤效应考虑其中。文献[9]详细分析了由齿槽所带来的空间谐波对电涡流损耗的影响。文献[10]提出一种新型SPMSM永磁体电涡流损耗的解析模型,可同时计算电涡流反作用,并分析任意次数时空谐波产生的永磁体涡流损耗,但由于解析法计算电涡流损耗时,需简化定子槽的结构,所以使用等效电流片等方法,将会损失一定的精度。文献[11]使用二维有限元法(2DFEM)对永磁体电涡流损耗进行估算,并考虑了估算所得的电涡流需在永磁体范围内积分为零。文献[12]使用2DFEM对铁心的叠片进行电涡流损耗的估计,并考虑了集肤效应。文献[13]在此基础上使用高阶2DFEM,提高了估算准确性,但需要更长的计算时间。文献[14]将计算域划分为一系列的子域,分别采用基于径向基函数(RBF)的点插值法得到形函数,然后将每个单独的区域作为Galerkin有限元的元素来近似计算整个计算区域的解。文献[15]结合混合时域有限差分(FDTD)与时域有限元(FETD),简化电磁建模,并采用间断Galerkin法耦合不同的区域,提高了耦合精度。文献[16]在三维电磁场模型的基础上将三维有限元法(3DFEM)与三维有限差分

法(3DFDM)结合,比原有的3DFEM节省了计算时间,但仍然比2DFEM的计算时间长。FEM精度较高,但计算时间较长,难以将电涡流反作用考虑其中,故将FEM与解析法相结合以达到减少计算时长同时保证精度的目的。文献[17]结合2DFEM与解析模型估算永磁体上的电涡流损耗,分析了脉冲宽度调制(PWM)对电涡流损耗的影响。文献[18]将FEM与傅里叶级数相结合,估算变压器油箱壁的电涡流损耗。结合FEM和解析法的计算模型较为繁琐,却能在保证精度的同时,减少计算时间,但仍然需要将电涡流反作用以及电涡流密度积分为零等因素考虑其中。

本文针对FEM计算时间较长以及应用解析法时等效模型较多而导致精度不足等问题,提出了一种混合有限元解析法,在定子、转子与永磁体部分使用FEM,在气隙部分使用傅里叶级数估算磁矢势,克服了FEM难以估算电涡流的反作用的问题。基于所得的磁矢势,计算电涡流密度与电涡流损耗,除去电涡流的均值,使得电涡流在永磁体上的积分为零。将仅使用Galerkin FEM的估算结果与混合有限元解析法的估算结果在气隙磁感应强度、磁感线以及磁矢势分布3个方面进行对比,并分析电涡流损耗与电流源频率之间的关系及电涡流密度和电涡流损耗在永磁体上的分布。对比混合有限元解析法的计算时间与Galerkin FEM的计算时间,并分析使用混合有限元解析法时所用到的傅里叶级数的次数对于估算准确性的影响,选取最佳的次数以提高准确性。

1 问题描述

分析计算电机永磁体的电涡流损耗,必须得到永磁体的电涡流密度,而电涡流密度则由包围在永磁体上的气隙磁感应强度决定。建立电机的电磁场模型,通过麦克斯韦方程组,可得^[11]:

$$\operatorname{curl}\left[\frac{1}{\mu}\operatorname{curl}(A)\right]=J_s-\sigma\frac{\partial A}{\partial t}-\sigma\operatorname{grad}(V)+\operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu}B_r\right) \quad (1)$$

式中: curl——旋度;

μ ——磁导率;

A ——磁矢势;

J_s ——源电流密度;

σ ——电导率;
 grad ——梯度;
 V ——电位移矢量;
 B_r ——剩磁。

通过对式(1)求解,可得磁矢势,进而求得气隙的磁感应强度。式(1)中的 $-\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{grad}(V)$ 是电涡流密度,而因为计算的是二维电磁场,认为永磁体上的电涡流在无穷远处闭合,忽略了周向分量,故 $-\sigma \text{grad}(V)$ 这部分被认为是零。式(1)的第一部分可分解为

$$\text{curl} \left[\frac{1}{\mu} \text{curl}(A) \right] = \frac{1}{\mu} \text{div}[\text{grad}(A)] - \nabla^2 A \quad (2)$$

式中: div ——散度;

$$\nabla^2 A \text{——拉普拉斯方程, } \nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0。$$

结合式(1)、式(2),可得:

$$\frac{1}{\mu} \text{div}[\text{grad}(A)] - \text{curl} \left(\frac{1}{\mu} B_r \right) = J_s - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3)$$

其中: $\sigma \frac{\partial A}{\partial t}$ 还可以写成 $\sigma \frac{A_{n+1} - A_n}{\Delta t}$ 。

式(3)为 PMSM 二维电磁场模型。由于式(3)是二阶偏微分方程,难以通过通解形式直接求得式中的未知数 A ,即磁矢势,需要使用 FEM 或解析法对磁矢势进行求解。

在使用 FEM 或者解析法时,必须对仿真对象进行建模,需要对 PMSM 的定子、转子、气隙以及永磁体的结构进行搭建。图 1 所示为本文使用的 PMSM 模型结构。由于不同区域中的初始条件不同,包括电导率和磁导率等参数,故各个区域内的电磁模型也略有区别。

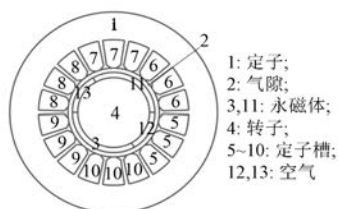


图1 永磁同步电机结构

在计算电涡流损耗时,并非仅仅计算在某一特定时刻、特定转子位置下的电磁特性,需要模拟

电机的旋转,即图 1 中的 3、4、11、12、13 区域需要改变位置,使用 FEM,需重新划分三角形单元。因重新划分后,节点个数与位置变化,由 FEM 计算而得的磁矢势个数不统一,式(3)中的 $\sigma \frac{\partial A}{\partial t}$ 部分则难以计算,故难以将电涡流的反作用考虑其中。通过 FEM,估算所得的电涡流密度在永磁体上的积分不为零,不符合闭合路径下电涡流密度积分为零的规律。

使用 FEM 仅需将如图 1 的电机结构搭建完毕即可,而使用解析法时,由于齿槽结构复杂,需要简化电机的模型,难以直接计算如图 1 所示结构电机的电涡流损耗。当同时考虑时间谐波和空间谐波时,由于时间谐波和空间谐波耦合,计算式复杂,难以保证与 FEM 相同的精度,故本文使用混合有限元解析法解决上述问题,在定子、齿槽、转子以及永磁体区域使用 FEM,而在气隙部分使用傅里叶级数,以达到保证精度、减少计算时间的目的。

2 混合有限元解析法

计算永磁体电涡流损耗,前提是必须得到 PMSM 电磁性能:磁矢势 A 、磁感应强度 B 以及永磁体上的电涡流密度 J 。得到永磁体电涡流损耗后,方可计算永磁体的温度。为获得电磁性能,需先对永磁同步电机进行控制,从而得到定子槽中的三相电流和转子的位置。如图 2 所示,本文主要的研究内容为虚线框内的 3 个步骤。下面使用 FEM 计算定子、转子、永磁体 3 个部分的磁矢势,而对于气隙部分使用解析法计算。得到永磁体的电涡流密度后,去除平均值,使得电涡流密度于任意时刻在永磁体上的积分为零,得到新的电涡流密度后再计算永磁体电涡流损耗。

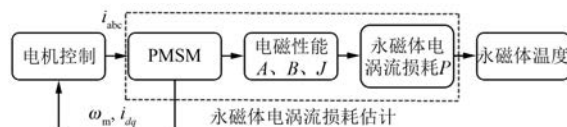


图2 PMSM性能计算框图

2.1 定子与永磁体部分的磁矢势计算

FEM 是一种数值分析的方法,用以解决较复杂的数学问题,将连续的求解域分解为离散单元的组合,然后求解每个单元的近似函数。近似值

可由导数的插值函数以及未知的场函数来表示,故可认为 FEM 使连续无限问题变为离散有限问题。FEM 可被分成 4 个步骤:(1)列出残差加权用以弱化原有的偏微分方程,并满足相同的边界条件;(2)将连续求解域划分成离散单元的组合,在每个单元中构造线性插值函数;(3)建立了典型的 Galerkin 法的方程组;(4)求解线性方程组,由于系数矩阵对称,故 LU 分解也可以用来计算方程组。

2.1.1 二维电磁场模型的弱化

首先对式(3)进行残差加权,目的是弱化二维电磁场模型^[19],可以表示为

$$\iint \frac{1}{\mu} W_i \operatorname{div}[\operatorname{grad}(A_{n+1})] dx dy - \iint W_i \operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu} B_r\right) dx dy = - \iint \sigma W_i \frac{A_{n+1} - A_n}{\Delta t} dx dy + \iint W_i J_{s(n+1)} dx dy \quad (4)$$

其中: W_i 为权重值; A_{n+1} 是未知数,为待求解的变量。

在使用 FEM 去求解偏微分方程时不能忽视的两部分是权函数和形函数。对于 Galerkin FEM,权函数和形函数的函数形式必须相同。为了区分权函数和形函数,权函数使用 W_i 来表示,而形函数使用 W_j 来表示。

式(4)的第一部分可以用如下等式替代:

$$\iint \frac{1}{\mu} W_i \operatorname{div}[\operatorname{grad}(A)] dx dy = - \iint \frac{1}{\mu} \operatorname{grad}(W_i) \operatorname{grad}(A) dx dy + \int \frac{1}{\mu} W_i \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma \quad (5)$$

其中: Γ 为包含求解域的闭合曲线,故最后一项为线积分。

由于本文采用 Neumann 边界条件,其边界为以定子外半径为半径的圆。认为圆外磁矢势为零,也没有磁感线,因此最后一项线积分的值为零。

对于式(4)的第二部分,建立如下关系式:

$$\operatorname{div}(B_0) = \operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu} B_r\right) \quad (6)$$

经过式(5)和式(6)的转变,对式(4)应用大帽形函数时,式(4)可以转变为

$$\sum_{j=1}^N \left[- \iint \frac{1}{\mu_j} \operatorname{grad}(W_i) \operatorname{grad}(W_j) A_{(n+1)j} dx dy \right] +$$

$$\iint \operatorname{grad}(W_i) B_0 dx dy = - \sum_{j=1}^N \iint \sigma_j W_i W_j \frac{A_{(n+1)j} - A_{nj}}{\Delta t} dx dy + \iint W_i J_{s(n+1)} dx dy \quad (7)$$

其中: N 为三角形区域划分后的节点个数,并且对于任意的节点,式(7)均成立。

2.1.2 坐标系的转变

式(7)是偏微分的形式,可以转变坐标系加以简化,由 x, y 坐标系转变为 u, v 坐标系,把全局坐标系变为局部坐标系,将全局坐标系中零散的三角形单元变成局部坐标系中的单位化等腰直角三角形,变换的对应关系如图 3 所示。

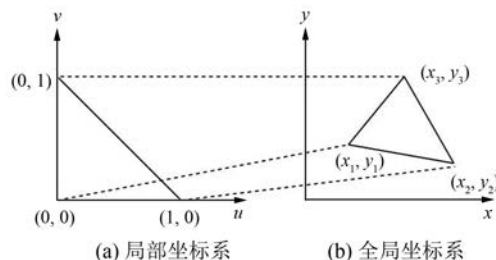


图 3 FEM 全局坐标系下的三角形与局部坐标系下的三角形节点对应关系

坐标系变换需要使用 Jacobian 矩阵。该矩阵反映的是 2 个坐标系之间的关系,形式如下:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (8)$$

在局部坐标系中,对于三角形的积分可以使用高斯积分法,选取高斯积分点进行求和计算替代原来的积分。

表 1 所示为三角形单元中 3 个高斯积分点的 u, v 坐标和相应的权重值。

表 1 三角形中高斯积分点的 u, v 坐标和权重值

k	u_k	v_k	w_k
1	1/6	1/6	1/6
2	2/3	1/6	1/6
3	1/6	2/3	1/6

积分中的 $dx dy = \det(J) du dv$, $\det(J)$ 为 Jacobian 矩阵的行列式,并且在式(7)中的 $\operatorname{grad}(W_i)$ 和 $\operatorname{grad}(W_j)$ 在经过坐标系变换后,需要乘

以 J^{-1} 以完成对于该部分的坐标系转变。经过坐

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{\mu_j} \det(J) \text{grad}(W_i) J^{-1} \sum_{k=1}^3 w_k \text{grad}(W_j) J^{-1} A_{(n+1)j} - \sum_{j=1}^N \det(J) \sigma_j W_i \sum_{k=1}^3 w_k W_j \frac{A_{(n+1)j}}{\Delta t} =$$

$$\sum_{j=1}^N \det(J) \text{grad}(W_i) J^{-1} \sum_{k=1}^3 w_k B_{0j} - \sum_{j=1}^N \det(J) \sigma_j W_i \sum_{k=1}^3 w_k W_j \frac{A_{nj}}{\Delta t} - \sum_{j=1}^N \det(J) W_i \sum_{k=1}^3 w_k J_{s(n+1)j} \quad (9)$$

为了方便在 MATLAB 中计算求解,还可以将式(9)写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式(10)中,第一行表示除去边界条件所在闭合曲线上的节点外的所有节点的方程,第二行是边界上的所有节点的等式。其中, B 为式(5)中的线积分,在使用 FEM 时, B 为零。至此,对于定子、转子和永磁体部分的求解矩阵已建立完成,但 FEM 在模拟电机旋转时,难以计算气隙磁场的畸变,在不同的转子静态位置下,需要重复划分三角形区域,改变了节点的位置,增加了计算时间,且无法计算电涡流的反作用,故下文将针对气隙部分使用解析法进行磁矢势的估计。

2.2 气隙部分的磁矢势计算

气隙部分的磁感应强度变化较大,需要增加有限元的三角划分个数,从而确保计算的准确性。但气隙部分相较于整个电机的厚度相当薄,难以加入足够数量的有限元三角来模拟气隙中的电磁场相互作用。当需要模拟电机旋转时,气隙中的有限元单元会发生畸变,从而导致求解的不准确,难以通过 FEM 计算。模拟电机旋转需要将旋转的一圈分解为较多的静止状态,在每一个静止状态,转子的位置均是不同的,故需要重新划分有限元三角形区域,再进行有限元计算,导致计算成本很大,增加了算法的复杂性。并且在重新划分区域后,由于节点数和节点位置不同,无法求得固定节点在 2 个不同时间点下的差值,也就无法求得其导数,故在计算过程中同样不能把电涡流的反作用考虑在内。因此,引入解析法对气隙部分的磁矢势进行估计。

2.2.1 边界条件的建立

PMSM 转子结构并不是一个平滑的圆,永磁体面贴在转子上,转子旋转时,永磁体相对于气隙是运动的,而永磁体与转子则是同步旋转的,故可将永磁体和转子视作一个整体。永磁体的电导率

与气隙不同,气隙中的电导率为零,没有电涡流损耗,故不能将永磁体与气隙认为是一个整体,需将气隙部分与其余部分分开,对气隙部分使用解析法,而对于其余部分使用 FEM。图 4 所示为使用解析法所要求解的环形区域,即气隙区域, r_o 为气隙区域的外半径, r_i 为内半径,对此区域使用傅里叶级数求解磁矢势。

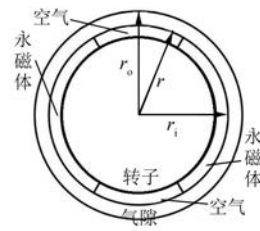


图 4 混合有限元解析法的环形区域

拉普拉斯方程的形式为 $\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0$, 在

极坐标系下,其形式为 $\nabla^2 A = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 0$,

则可以根据拉普拉斯方程求得 A 的通解为

$$A = \sum_{n=1}^{N_H} \left[\left(\frac{r}{r_o} \right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \left(\frac{r_i}{r} \right)^n (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \right] \quad (11)$$

式中: N_H ——傅里叶级数的次数;

a_n, b_n, c_n, d_n ——傅里叶级数中的 $4 \times N_H$ 个未知系数。

求解出式(11)的未知系数后,可得气隙部分任一位置的磁矢势。在求得磁矢势后,气隙中任一位置的磁感应强度与磁场强度也均可以求得。通过改变式(11)中的 θ 值可以达到模拟转子侧旋转的要求。对于图 4 而言,旋转的范围是永磁体与转子,并非仅仅是转子,故需要将边界范围所在的圆半径定为永磁体的外半径,而非转子的外半径;并且在模拟转子旋转时,仅仅需要改变气隙内半径所在圆的 θ 值,无需改变气隙外半径所在圆的 θ 值,与实际电机旋转的情况相符。

对于式(5)中的线积分,定子外半径所在圆的线积分为零,满足 Neumann 边界条件,但对于气隙区域的 2 个圆所在的线积分则不为零,因为在圆的磁矢势不为零,且 2 个圆的线积分可以计算:

$$B_j = \int \frac{1}{\mu_j} W_j \frac{\partial A_j}{\partial n} d\Gamma = \int (-W_j H_\theta) d\Gamma \quad (12)$$

其中: H_θ 为磁场强度的切向分量。

A_j 与 H_θ 的关系由 $B_\theta = \mu_j H_\theta$ 和 $B_\theta = -\partial A / \partial r$ 2 个关系式所确立, H_θ 则可由上述 2 个关系式和式(11)推导而得。对于计算 B_j , 还需设定形函数 W_j 。

2.2.2 求解矩阵的建立

图 5 中, θ_{j+1} 、 θ_j 、 θ_{j-1} 为气隙边界上任取的相邻 3 个节点的角度值, 3 个节点的选取可以与有限元三角形区域划分后在边界上的节点相同, 无需重新选取节点。

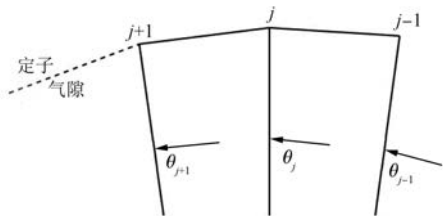


图 5 气隙边界的相邻节点

根据该 3 个点的位置关系, 可以求得 j 点的形函数^[20]:

$$\begin{cases} W_j = \frac{1}{\theta_j - \theta_{j-1}} \theta - \frac{\theta_{j-1}}{\theta_j - \theta_{j-1}}, \theta \in [\theta_{j-1}, \theta_j) \\ W_j = \frac{1}{\theta_j - \theta_{j+1}} \theta + \frac{\theta_{j+1}}{\theta_{j+1} - \theta_j}, \theta \in [\theta_j, \theta_{j+1}) \end{cases} \quad (13)$$

设定该形函数目的是使形函数在计算点 j 时, 其值为 1, 而在相邻 2 个点 $j-1$ 与 $j+1$ 时, 其值为 0。因磁矢势的通解形式是在极坐标系下的, 故对于形函数的设定也必须在极坐标系下, 而非有限元方法中的 x - y 坐标系。将式(13)和式(11)代入式(12)可得:

$$\begin{cases} B_{jo} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{n=1}^{N_H} (u_{njo} a_n + v_{njo} b_n - \xi^n u_{njo} c_n - \xi^n v_{njo} d_n) \\ B_{ji} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{n=1}^{N_H} (-\xi^n u_{nji} a_n - \xi^n v_{nji} b_n + u_{nji} c_n + v_{nji} d_n) \end{cases} \quad (14)$$

式中: B_{jo} ——气隙外半径下点的线积分值;

B_{ji} ——气隙内半径下点的线积分值;

ξ ——内半径与外半径的比值。

u_{njo} 、 v_{njo} 的形式可以表达如下:

$$\begin{cases} u_{njo} = \frac{1}{n} \left[\frac{\cos n\theta_j - \cos n\theta_{j-1}}{\theta_j - \theta_{j-1}} - \frac{\cos n\theta_{j+1} - \cos n\theta_j}{\theta_{j+1} - \theta_j} \right] \\ v_{njo} = \frac{1}{n} \left[\frac{\sin n\theta_j - \sin n\theta_{j-1}}{\theta_j - \theta_{j-1}} - \frac{\sin n\theta_{j+1} - \sin n\theta_j}{\theta_{j+1} - \theta_j} \right] \end{cases} \quad (15)$$

u_{nji} 、 v_{nji} 与 u_{njo} 、 v_{njo} 的形式相同, 不同之处在于具体对应节点的弧度值。对式(11)进行变换, 令式(11)中的 r 等于 r_o 时, 将 r_o 下的磁矢势乘以 $\cos n\theta$, 并在 $0 \sim 2\pi$ 的范围内积分, 则可得 a_n 与 c_n 的关系式, 同理乘以 $\sin n\theta$, 则可得 b_n 和 d_n 的关系式。令 r 等于 r_i 也同样可以得到 a_n 与 c_n 、 b_n 与 d_n 在半径为 r_i 下的关系式。联立 a_n 与 c_n 、 b_n 与 d_n 在 r_o 与 r_i 下的 4 个关系式, 可得其 a_n 、 b_n 、 c_n 和 d_n :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{(1 - \xi^{2n})} \frac{1}{\pi} \left[\sum_{j=1}^{N_B^O} \frac{1}{n} u_{njo} A_{jo} - \xi^n \sum_{j=1}^{N_B^I} \frac{1}{n} u_{nji} A_{ji} \right] \\ b_n = \frac{1}{(1 - \xi^{2n})} \frac{1}{\pi} \left[\sum_{j=1}^{N_B^O} \frac{1}{n} v_{njo} A_{jo} - \xi^n \sum_{j=1}^{N_B^I} \frac{1}{n} v_{nji} A_{ji} \right] \\ c_n = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - \xi^{2n})} \left[\xi^n \sum_{j=1}^{N_B^O} \frac{1}{n} u_{njo} A_{jo} - \sum_{j=1}^{N_B^I} \frac{1}{n} u_{nji} A_{ji} \right] \\ d_n = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - \xi^{2n})} \left[\xi^n \sum_{j=1}^{N_B^O} \frac{1}{n} v_{njo} A_{jo} - \sum_{j=1}^{N_B^I} \frac{1}{n} v_{nji} A_{ji} \right] \end{cases} \quad (16)$$

式中: N_B^O 为半径 r_o 的圆上总节点个数, 而 N_B^I 则为半径为 r_i 的圆上总节点个数。

根据式(16)的傅里叶级数 $4 \times N_H$ 个未知数的表达形式, 则可以与式(10)所表示的矩阵结合:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & B' \\ 0 & T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中: S_{11} 、 S_{12} 、 F_1 、 A_1 ——除去边界的所有有限元三角区域划分后的节点参数;

S_{21} 、 S_{22} 、 A_2 、 F_2 ——以定子外半径为半径的圆上所有节点的参数, 其对应的节点上的参数值均与 FEM 相同, 唯一不同的便是节点的个数和顺序。

需要设定的有 B' 、 T 、 D 和 A_3 。在此需要说明: A_3 便是傅里叶级数的 $4 \times N_H$ 个未知数, B' 、 T 、 D

这 3 个矩阵的元素设定均可由式 (16) 获得。在设定完成式 (17) 的矩阵后,可以发现该矩阵仍然是个对称矩阵。由式 (17) 可求得电机上定子、转子、永磁体所有节点的磁矢势与傅里叶级数的 $4 \times N_H$ 个系数,根据系数可计算出气隙所有节点的磁矢势。在计算完磁矢势后,便可以计算气隙的磁感应强度、磁场强度以及永磁体上的电涡流密度和电涡流损耗。

2.3 永磁体电涡流损耗计算

在求得磁矢势后,可以使用式 (3) 所提到的 $\sigma \frac{A_{n+1}-A_n}{\Delta t}$ 对电涡流密度进行求解,即:

$$\hat{J}_e = \sigma \frac{A_{n+1} - A_n}{\Delta t} \tag{18}$$

由于电涡流在永磁体上所呈现的是一个闭合路径,所以在永磁体范围内的积分值应当为零。因此,估算所得的电涡流应当消除平均值^[11]:

$$J_e = \hat{J}_e - \bar{\hat{J}}_e \tag{19}$$

$\bar{\hat{J}}_e$ 可以表示为

$$\bar{\hat{J}}_e = \frac{1}{\Omega_e} \iint_{\Omega_e} \left(-\sigma \frac{\partial A}{\partial t} \right) d\Omega \tag{20}$$

式中: Ω_e ——永磁体区域。

计算完永磁体上的电涡流密度后,可计算永磁体的电涡流损耗^[11]:

$$P = l_a \int_{\Omega_e} \frac{J_e^2}{\sigma} d\Omega \tag{21}$$

式中: l_a ——永磁体轴向长度。

根据式 (21) 可以计算出永磁体上的电涡流损耗。

使用混合有限元解析法求解永磁体电涡流损耗,需首先对 PMSM 的模型进行区域的划分,共分为 4 个部分:定子、转子、气隙以及永磁体。由于混合有限元解析法在模拟电机旋转时,无需重复分解有限元三角形单元,对定子、转子以及永磁体使用 FEM 设定求解矩阵。对于气隙部分,不需要三角形区域分解,提取气隙边界的节点,使用傅里叶级数估算节点上的磁矢势,设定求解矩阵后,与 FEM 所得的求解矩阵合并,求解电机所有部分的磁矢势。根据求解所得的磁矢势,便可计算气隙磁感应强度以及永磁体涡流损耗。基于上述混合有限元解析法的步骤,所绘制的永磁体电涡流

损耗的估计流程图如图 6 所示。

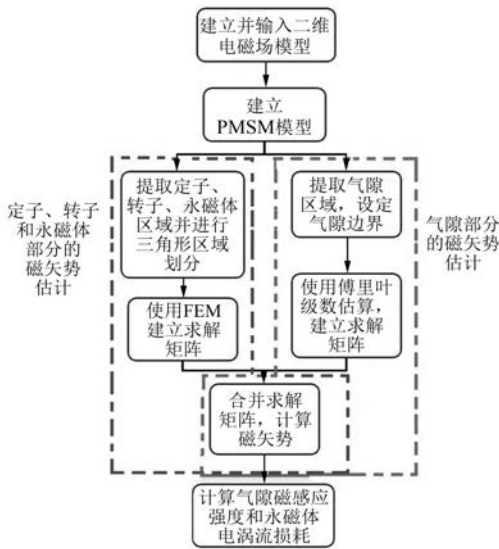


图 6 基于混合有限元解析法的永磁体电涡流损耗求解流程图

3 结果分析与对比

为了证明混合有限元解析法的可行性,将 Galerkin FEM 以及混合有限元解析法作比较,给出了既有永磁体剩磁又有定子电流情况下的气隙磁感应强度。分析 2 种方法下的磁感线分布,并计算分析了电流源不同频率下的永磁体电涡流损耗。分析永磁体电涡流密度的分布以及永磁体电涡流损耗的分布,对 2 种方法运行时间和有限元三角形个数作比较,并对不同傅里叶级数次数下 2 种方法的误差进行分析,以求得最佳的傅里叶级数次数。PMSM 参数值如表 2 所示。

表 2 PMSM 参数值

参数名称	参数值	参数名称	参数值
定子外半径/mm	57.9	齿槽外半径/mm	41.9
齿槽内半径/mm	25.5	气隙厚度/mm	2.5
永磁体厚度/mm	3.0	转子半径/mm	20.0
槽数	18	槽宽度/mm	8.9
槽口宽度/mm	3.0	永磁体宽度/mm	48.1
永磁体轴向长度/mm	144.7	线圈相对磁导率	1
定子相对磁导率	1 000	转子相对磁导率	1 000
电流源频率/Hz	500	永磁体剩磁/T	0.9
永磁体电导率/(S·m ⁻¹)	1×10 ³	源电流密度幅值/(A·m ⁻²)	7.5×10 ⁶

在设定参数时,对于定子电导率、转子电导率以及线圈电导率均设置为零,其目的是简化仿真,忽略在定子、转子以及定子槽中通电线圈上的电涡流的计算。原因是与定子、转子上的铁耗以及线圈中的铜耗相比,电涡流损耗占有的损耗比重极小,可以忽略不计。对于永磁体而言,唯一的损耗便是电涡流损耗,是永磁体发热的根本原因,因此不可省略。

通过定子电流源在气隙中所产生磁场以及永磁体剩磁在气隙中所产生磁场的叠加,如图 7 所示(即图 1 中区域 2 的磁感应强度)。可以看出 2 种方法所得到的气隙中的磁感应强度几乎相同,细微的不同,则与使用不同方法时估算的误差有关。

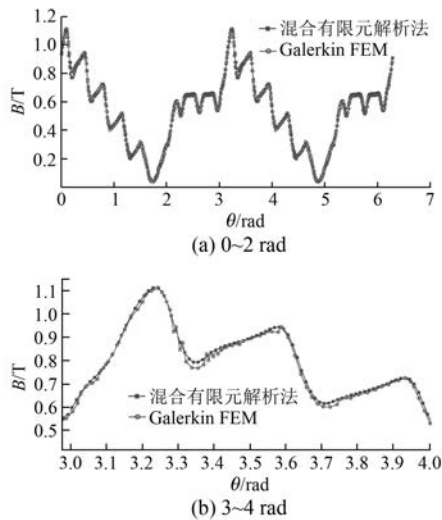


图 7 FEM 与混合有限元解析法的气隙磁感应强度

定子三相电流所产生的合成磁场方向与永磁体所产生的磁场方向不同,其夹角应当为 90° ,按其旋转方向,定子合成磁场应当领先于永磁体磁场。图 8 所示为 2 种方法的磁感线与磁矢势,磁感线是轴对称的图形,为定子合成磁场与永磁体磁场的叠加;并且图中的颜色深度反映的便是每个三角形单元中磁矢势的大小。由此可以看出 2 种方法所得到的结果几乎相同,并且使用混合有限元解析法比 Galerkin FEM 省去了对气隙的三角形单元划分。至此,可以得出结论,混合有限元解析法与 Galerkin FEM 有着几乎相同的精度,混合有限元解析法也能像 Galerkin FEM 一样,完成对电机电磁性能的计算。

表 3 所示为 Galerkin FEM 与混合有限元解析法

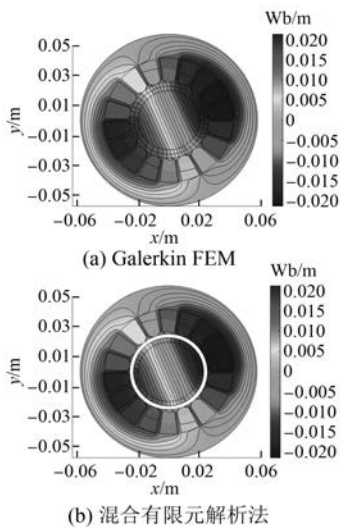


图 8 磁感线与磁矢势

所需要花费的时间,可以看到混合有限元解析法使用傅里叶级数从而替代有限元区域分解后三角形单元的磁矢势求解,节省了较多的区域划分时间。在不同的傅里叶级数次数下,磁感应强度的误差不同,如图 9 所示。经过多次运算发现,当傅里叶级数次数选为 100,即傅里叶级数系数的个数为 400 时,误差最小,与 Galerkin FEM 最为接近,误差约为 1%。由此可以得出,混合有限元解析法与 Galerkin FEM 一样能够准确地计算出电机的电磁性能,但混合有限元解析法在计算时间上节省较多。

表 3 计算的时间以及相关参数

仿真方法	一个位置	一个周期	三角形	傅里叶级数
	仿真时间/s	(100 位置) 仿真时间/s	单元个数	系数个数
Galerkin FEM	4.96	559.91	10 371	0
混合有限元 解析法	1.90	198.35	6 161	400

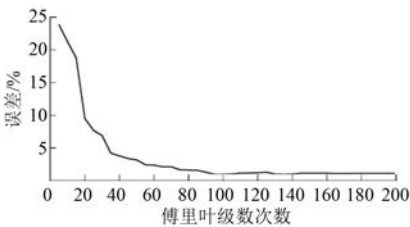


图 9 不同傅里叶级数次数下 2 种方法的磁感应强度误差

电涡流损耗与电流源频率的关系如图 10 所示。由图 10 可见,当电流源频率越大,永磁体上的电涡流损耗也越大,且根据拟合发现电涡流损耗与电流源频率呈平方关系。在磁对极不变的情况下,转速与电流源频率呈正比关系,故图 10 也验证了电涡流损耗与转速的平方关系。为了使电机寿命延长,保护永磁体使其不发生退磁现象,电流源的频率不宜过高,转速也不宜过高。

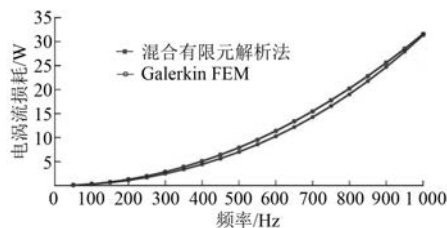


图 10 不同频率下 2 种方法的电涡流损耗与频率的关系

在求解气隙磁感应强度与永磁体电涡流损耗时,由于 FEM 的三角形区域划分无法使气隙中的节点正好在一个圆上,故需要选定气隙中的一个圆,设定节点,并使用插值法,计算该圆上的磁感应强度。使用 FEM 计算永磁体电涡流损耗时也同样需要对永磁体区域使用插值法,固定节点才能计算节点上的电涡流密度。在使用混合有限元解析法时,气隙磁感应强度位于傅里叶级数估算的范围内,只需给出节点的坐标,根据已求得的傅里叶级数系数,便可估算出该节点下的磁感应强度,无需再进行插值计算。并且在计算电涡流损耗时,混合有限元解析法只需对全域进行一次三角形区域划分,节点固定,可以直接应用式(18)进行计算。

永磁体的电涡流密度分布如图 11 所示,可以看到电涡流密度的最大值集中在永磁体的端部,且靠近气隙部分的电涡流密度比靠近转子侧的电涡流密度大。从图 12 可以看出电涡流损耗集中

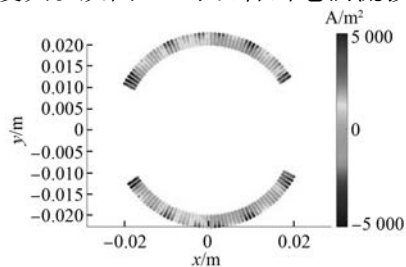


图 11 永磁体上的电涡流密度分布

在永磁体的端部和表面,这是由于集肤效应,使得电涡流损耗的能量集中在永磁体表面,并以热量的形式显现。由于端部和表面的损耗较高,其温度也会较高,极易发生退磁现象,对永磁体的性能有较大的影响。

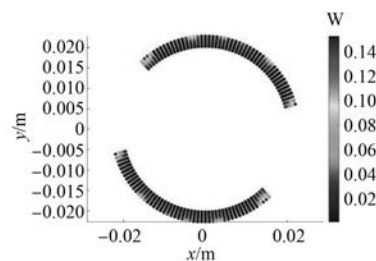


图 12 永磁体上的电涡流损耗分布

4 结 语

本文应用混合有限元解析法,解决了 FEM 求解 PMSM 永磁体电涡流损耗计算时间冗长,模拟电机旋转时需重新划分三角形区域,且难以将电涡流反作用考虑在内等问题。因此,对于电机的定子、转子以及永磁体部分采用 FEM 求解磁矢势,而对气隙部分采用解析法求解磁矢势。通过对比混合有限元解析法与 Galerkin FEM 求解的磁感应强度与电涡流损耗,证明了混合有限元解析法的可行性,并且节省了计算时间。在计算永磁体电涡流密度时,除去了平均值,使得电涡流密度在永磁体上的积分为零,符合闭合路径下电涡流密度积分为零的物理规律。验证了电涡流损耗与电流源频率呈平方关系,以及永磁体上的电涡流损耗符合端部效应以及集肤效应的特征,为后续的温度场计算以及电机的优化工作打下了良好的基础。

【参考文献】

- [1] YANG J, CHEN W, LI S, et al. Disturbance/uncertainty estimation and attenuation techniques in PMSM drives—a survey [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(4): 3273.
- [2] LIU K, ZHU Z Q. Mechanical parameter estimation of permanent-magnet synchronous machines with aiding from estimation of rotor PM flux linkage [J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 2015, 51(4): 3115.

- [3] FERNANDEZ D, REIGOSA D D, GUERRERO J M, et al. Permanent-magnet magnetization state estimation using high-frequency signal injection [J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 2016, 52(4): 2930.
- [4] 黄东洙, 李伟力, 王耀玉, 等. 磁性槽楔对永磁电机转子损耗及温度场影响 [J]. 电机与控制学报, 2016, 20(1): 60.
- [5] 司纪凯, 张露锋, 封海潮, 等. 异步起动表面-内置式永磁转子同步电机特性分析及优化 [J]. 电工技术学报, 2017, 32(9): 63.
- [6] 陈萍, 唐任远, 佟文明, 等. 高功率密度永磁同步电机永磁体涡流损耗分布规律及其影响 [J]. 电工技术学报, 2015, 30(6): 1.
- [7] MASMOUDI A. 3-D analytical model with the end effect dedicated to the prediction of PM eddy-current loss in FSPMMs [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2015, 51(4): 8103711.
- [8] HEMEIDA A, SERGEANT P, VANSOMPEL H. Comparison of methods for permanent magnet eddy-current loss computations with and without reaction field considerations in axial flux PMSM [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2015, 51(9): 8107511.
- [9] 孙权贵, 邓智泉, 张忠明. 基于齿槽效应的高速永磁电机转子涡流损耗解析计算 [J]. 电工技术学报, 2018, 33(9): 1994.
- [10] 唐任远, 陈萍, 佟文明, 等. 考虑涡流反作用的永磁体涡流损耗解析计算 [J]. 电工技术学报, 2015, 30(24): 1.
- [11] STEENTIJS S, BOEHMER S, HAMEYER K. Permanent magnet eddy-current losses in 2-D FEM simulations of electrical machines [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2015, 51(3): 6300404.
- [12] KAKHKI M T, CROS J, VIAROUGE P. New approach for accurate prediction of eddy current losses in laminated material in the presence of skin effect with 2-D FEA [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2016, 52(3): 6300604.
- [13] HOLLAUS K, SCHÖBERL J. A higher order multi-scale FEM with A for 2-D eddy current problems in laminated iron [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2015, 51(3): 7402804.
- [14] ZOU Y, LEI G, SHAO K, et al. Hybrid approach of radial basis function and finite element method for electromagnetic problems [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2015, 51(3): 7201704.
- [15] SUN Q, REN Q, ZHAN Q, et al. 3-D domain decomposition based hybrid finite-difference time-domain/finite-element time-domain method with nonconformal meshes [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2017, 65(10): 3682.
- [16] BENLAMINE R, DUBAS F, RANDI S, et al. 3-D numerical hybrid method for PM eddy-current losses calculation: application to axial-flux PMSMs [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2015, 51(7): 8106110.
- [17] CHENG M, ZHU S. Calculation of PM eddy current loss in IPM machine under PWM VSI supply with combined 2-D FE and analytical method [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2017, 53(1): 6300112.
- [18] YAN X, YU X, SHEN M, et al. Research on calculating eddy-current losses in power transformer tank walls using finite-element method combined with analytical method [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2016, 52(3): 6300704.
- [19] SALON S J, D'ANGELO J. Applications of the hybrid finite element-boundary element method in electromagnetics [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1988, 24(1): 80.
- [20] FELIACHI M, COULOMB J, MANSIR H. Second order air-gap element for the dynamic finite-element analysis of the electromagnetic field in electric machines [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1983, 19(6): 2300.

收稿日期: 2018-12-18