

基于虚拟主轴的分数阶趋近律同步控制策略

张 靓, 张 鑫, 鲁文儒

(兰州交通大学 自动化与电气工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 针对机械臂各关节高精度同步控制问题, 选取与传统趋近律不同的分数阶趋近律, 采用交叉耦合控制结构, 提出了一种基于方差虚拟主轴的分数阶趋近律同步控制策略, 并对所提的控制策略进行了稳定性证明。以两关节机械臂为研究对象进行了仿真验证。仿真结果表明: 所提的控制策略可以使机械臂系统的跟踪误差和同步误差均快速收敛, 且具有更快的响应速度和较强的鲁棒性。

关键词: 同步控制; 机械臂; 分数阶趋近律; 交叉耦合; 虚拟主轴

中图分类号: TP 273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-6540(2019)10-0066-06

Synchronous Control Strategy with Fractional-Order Reaching Law Based on Virtual Principal Axis

ZHANG Jing, ZHANG Xin, LU Wenru

(School of Automation & Electrical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Aiming at the problem of high-precision synchronous control of the joints of manipulators, a fractional-order reaching law which was different from the traditional reaching law was selected. A cross-coupling control structure was proposed. A synchronous control strategy of fractional-order reaching law based on the variance virtual principal axis was proposed. The stability of the proposed control strategy was proved. Simulation was carried out for a two-joint manipulator. The simulation results showed that the proposed control strategy could make the tracking error and synchronization error of the manipulator system converge quickly, and had faster response speed and stronger robustness.

Key words: synchronous control; manipulator; fractional-order reaching law; cross-coupling; virtual principal axis

0 引 言

在《中国制造 2025》《机器人产业发展规划(2016—2020 年)》等产业政策的引导下, 工业机器人呈现出良好的发展态势。机械臂是一种具有时变、强耦合等特征的非线性系统, 具有多个输入、多个输出。传统机械臂控制方法已经难以满足精度要求, 在工业领域中越来越多的控制研究应用于机械臂^[1-3]。因此, 对机械臂同步控制策略进行研究显得尤为重要。

分数阶微积分是研究任意阶积分和微分的理论。分数阶微积分算子具有遗传和记忆两大特

性, 并且增加了自由度的可变性^[4-5], 但是滑模控制有更快的响应速度和较强的鲁棒性。因此, 将分数阶微积分理论与滑模控制相结合的控制策略在各个领域得到了广泛的应用。文献[6-9]以永磁同步电机为被控对象, 提出了对速度和位置进行控制的分数阶滑模控制策略。文献[10]设计了一种新型控制器。该控制器将分数阶微积分算子同时加入到滑模面和控制输入中以改善航天器的跟踪控制性能, 加强了系统的快速性、强鲁棒性、抗干扰性。文献[11]将分数阶滑模控制策略应用于双馈风力发电机中, 以实现直接功率的控制。文献[12]为了提高速度传感器的精度, 提

作者简介: 张 靓(1994—), 女, 硕士研究生, 研究方向为工业机器人控制。

出了一种转速及磁链的分数阶滑模观测器。文献[13]针对不确定性的系统,设计了一种分数阶滑模观测器。但是,目前分数阶滑模控制策略应用于机械臂的研究仍然较少。受文献[14-15]的启发,本文选取与传统趋近律不同的分数阶趋近律,提出了一种基于方差虚拟主轴的分数阶趋近律同步控制策略,搭建了相应的仿真模型,并与其他控制策略进行对比,证明了所提控制策略的优越性、有效性、可行性。

1 机械臂模型

因为机械臂是一个复杂的多输入、多输出的非线性系统,所以采用 Lagrange 法对机械臂动力学方程进行建模。定义 Lagrange 函数 L :

$$L = T - V \quad (1)$$

式中: T ——整个系统的动能;

V ——整个系统的势能,仅与位置有关,即 $V = V(q)$ 。

可将 Lagrange 方程写为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

式中: $q_i, \dot{q}_i$ ——机械臂系统的位置、速度;

τ ——系统选定的力矩矢量;

n ——机械臂的关节数目。

忽略建模误差扰动项,将整个系统的动能和势能代入式(2),可得 n 关节机械臂拉格朗日运动学方程为

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau \quad (3)$$

式中: $M(q)$ —— $n \times n$ 阶机械臂的对称正定惯性矩阵;

$C(q, \dot{q})$ —— $n \times 1$ 阶机械臂的离心力、科里奥利力矩阵;

$G(q)$ —— $n \times 1$ 阶机械臂的重力矩阵;

τ —— $n \times 1$ 阶机械臂的控制力矩。

2 分数阶趋近律

常见的趋近律有 4 种类型:等速趋近律、指数趋近律、幂次趋近律、一般趋近律。本文采用不同于传统趋近律的分数阶滑模趋近律,即在传统趋近律的基础上引入分数阶微积分理论,只要调节阶次 α 和系数 k ,就可以控制该系统状态到达滑模面的速度。分数阶趋近律的形式:

$$D^\alpha s = -k \operatorname{sign}(s), 0 < \alpha < 1 \quad (4)$$

式中: D ——分数阶算子。

证明:

取如下的李雅普诺夫函数:

$$Y = \frac{1}{2} s^T s \quad (5)$$

根据连续可积函数分数阶微积分的统一定义形式^[16],可得:

$$\begin{cases} \dot{s} > 0 \\ \dot{s} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D^\alpha s > 0 \\ D^\alpha s < 0 \end{cases} \quad (6)$$

利用式(4)和式(6),并对式(5)求导可得:

$$\dot{Y} = s^T \dot{s} = s^T D^{1-\alpha} [-k \operatorname{sign}(s)] \quad (7)$$

由 $\operatorname{sign}\{D^{1-\alpha}[-k \operatorname{sign}(s)]\} = -k \operatorname{sign}(s)$ ^[17] 可得:

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}[\dot{Y}(t)] &= \operatorname{sign}(s^T) \operatorname{sign}\{D^{1-\alpha}[-k \operatorname{sign}(s)]\} = \\ &= -k \operatorname{sign}(s^T) \operatorname{sign}(s) = -k \end{aligned} \quad (8)$$

因此 $\dot{Y} \leq 0 \Rightarrow D^\alpha Y \leq 0$, 根据文献[16],该系统是渐近稳定的。

3 基于方差虚拟主轴的分数阶趋近律同步控制原理

3.1 虚拟参考主轴

在多关节同步运动控制系统中,为了实现各关节之间的“耦合”控制,需要将不同关节之间的运动参数偏差作为运动控制系统的指标,将这种偏差定义为同步误差。以位置同步控制为例,定义跟踪误差 $e(k) = q_d(k) - q(k)$, $q(k)$ 为实际位置坐标, $q_d(k)$ 为期望位置坐标。

在多关节对等的耦合补偿控制系统中,同步误差通常采用“链式”定义,通过位置同步误差建立了两关节之间的耦合关系,如式(9)所示:

$$\begin{cases} \varepsilon_1(k) = e_1(k) - e_2(k) \\ \varepsilon_2(k) = e_2(k) - e_3(k) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(k) = e_n(k) - e_1(k) \end{cases} \quad (9)$$

式中: ε_i ——第 i 关节的同步误差。

由式(9)可知,若要达到同步控制要求,即使 $\varepsilon_i \rightarrow 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $e_1 = e_2 = e_3 = \dots = e_n$, 每个关节的控制只与相邻的关节有关,无需考虑其他关节。

由于在关节数目比较多的情况下,采用“链

式”同步控制会产生误差的累积效应,对系统的整体同步精度造成不利影响。为了改善这一状况,本文引入了虚拟主轴。

假设存在编号为 0 的轴,其期望位置坐标与其他各关节相同,均为 $q_d(k)$,实际位置坐标为 $q_0(k)$,跟踪误差为 $e_0(k)$ 。系统中各个关节的同步误差均以虚拟主轴为基准进行定义:

$$\begin{cases} \varepsilon_i(k) = e_i(k-1) - e_0(k-1) \\ \varepsilon_i(1) = 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

利用方差定义实际位置坐标 $q_0(k)$ 和跟踪误差 $e_0(k)$:

$$\begin{cases} q_0(k) = \frac{\sum_{i=1}^n [q_i(k) - \bar{q}(k)]}{n-1} \\ e_0(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i(k) = q_d(k) - q_0(k) \end{cases} \quad (11)$$

3.2 分数阶趋近律交叉耦合同步控制器

取跟踪误差:

$$e = q_d - q \quad (12)$$

式中: q ——实际位置坐标;

q_d ——期望位置坐标。

设计滑模面:

$$s = \dot{e} + ce \quad (13)$$

式(13)求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{s} = \ddot{e} + c\dot{e} = \ddot{q}_d - \ddot{q} + c\dot{e} = \\ \ddot{q}_d - M^{-1}(u - c\dot{q} - G) + c\dot{e} \end{aligned} \quad (14)$$

选取分数阶趋近律:

$$D^\alpha s = -k \text{sign}(s), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (15)$$

式(14)结合式(15)可得:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_d - M^{-1}(u - c\dot{q} - G) + c\dot{e} = \\ D^{1-\alpha}[-k \text{sign}(s)] \end{aligned} \quad (16)$$

将式(16)化简可得:

$$u = M\{\ddot{q}_d + c\dot{e} + D^{1-\alpha}[-k \text{sign}(s)]\} + c\dot{q} + G \quad (17)$$

根据第 2 节稳定性证明可得 $\dot{Y} \leq 0 \Rightarrow D^\alpha Y \leq 0$, 该系统是渐近稳定的。

4 仿真对比验证

为了验证本文所提方法的有效性,分别给定期望轨迹为单位阶跃响应和正弦信号,利用

MATLAB 软件对试验进行仿真并与传统算法进行对比,动力学模型取第 1 节的结果,即式(3)。该模型选取的参数如下:

$$M(q) = \begin{bmatrix} v + q_{01} + 2q_{02}\cos(q_2) & q_{01} + q_{02}\cos(q_2) \\ q_{01} + q_{02}\cos(q_2) & q_{01} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -q_{02}\dot{q}_2\sin(q_2) & -q_{02}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\sin(q_2) \\ q_{02}\dot{q}_1\sin(q_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 15g\cos q_1 + 8.75g\cos(q_1 + q_2) \\ 8.75g\cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中: $v = 13.33, q_{01} = 8.98, q_{02} = 8.75, g = 9.8^{[18]}$ 。

机械臂 2 个关节的位置指令分别设置为 $q_{1d} = \cos(\pi t)$ 和 $q_{2d} = \sin(\pi t)$, 则系统的初始状态为 $[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T = [0.6 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.5]^T$, 控制参数取 $C_1 = C_2 = 40, \varepsilon = 0.5, k = 50, k_p = 10, k_d = 20$ 。为了验证本文所提方差虚拟主轴的分数阶趋近律同步控制策略的优越性与可行性,将其与其他 3 种方法进行仿真对比,其中方法 1 为 PD 平均值虚拟主轴同步控制策略,方法 2 为分数阶趋近律同步控制策略,方法 3 为平均值虚拟主轴的分数阶趋近律同步控制策略。

4.1 单位阶跃信号仿真分析

当期望跟踪轨迹为单位阶跃信号时,为了使结果更具有对比性,将试验仿真时间设置为 1 s,坐标轴延展到与 10 s 仿真结果一致,可得各关节跟踪轨迹,如图 1 所示。表 1 所示为 4 种同步控制策略的单位阶跃响应性能指标。机器人系统应满足单位阶跃响应性能指标要求:最大超调量 $\sigma \leq 30\%$; 调整时间 $t_s \leq 1.5 \text{ s}$, 稳态误差 $e_{ss} \leq$

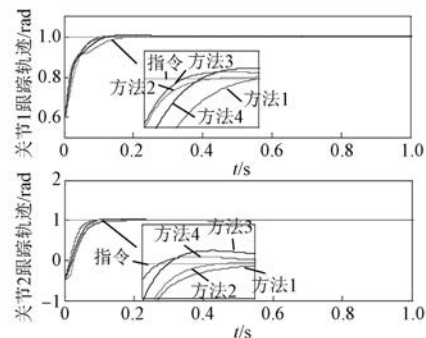


图 1 4 种控制策略的单位阶跃响应

0.01 rad。由单位阶跃响应性能指标要求可知,本文所提方法可以较好满足单位阶跃响应性能指标要求。

表 1 单位阶跃响应性能指标

结果		最大超调量	调整时间	稳态误差
		$\sigma/\%$	t_s/s	e_{ss}/rad
方法 1	关节 1	0	0.179	<0.000 2
	关节 2	0	0.181	<0.000 2
	关节 1	0	0.126	<0.000 2
方法 2	关节 2	0	0.131	<0.000 2
方法 3	关节 1	1.0	0.123	<0.000 1
	关节 2	4.1	0.095	<0.000 2
本文方法	关节 1	0.6	0.101	<0.000 1
	关节 2	2.4	0.085	<0.000 1

4. 2 正弦信号仿真分析

当期望跟踪轨迹为正弦信号时,分别得到 4 种同步控制策略的仿真结果如图 2~图 8 所示。图 2 为 PD 平均值虚拟主轴同步控制策略的跟踪轨迹和控制输入。图 3 为分数阶趋近律同步控制策略的跟踪轨迹和控制输入。图 4 为平均值虚拟主轴的分数阶趋近律同步控制策略的跟踪轨迹和控制输入。图 5 为方差虚拟主轴的分数阶趋近律同步控制策略的跟踪轨迹和控制输入。图 6 为 4 种同步控制策略的位置跟踪误差对比。图 7 和图 8 为 4 种同步控制策略的同步误差对比。

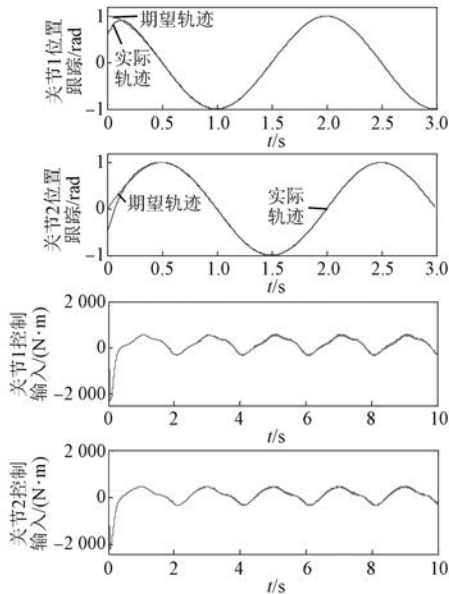


图 2 方法 1 跟踪轨迹和控制输入曲线

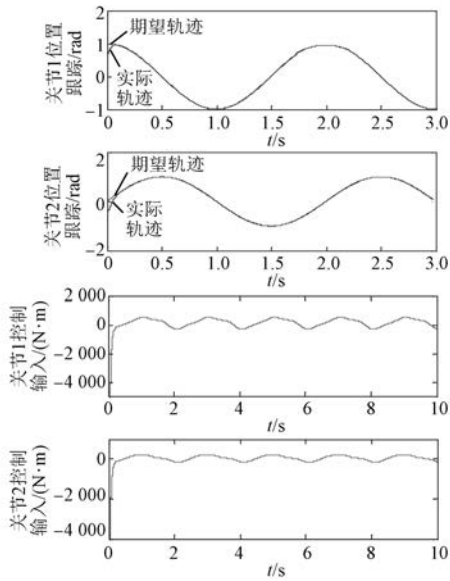


图 3 方法 2 跟踪轨迹和控制输入曲线

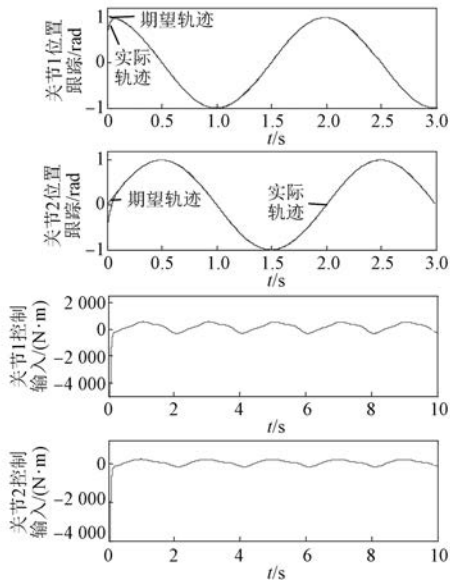


图 4 方法 3 跟踪轨迹和控制输入曲线

在同时选取平均值虚拟主轴的前提下,与方法 1 相比,方法 3 采用分数阶趋近律可以在一定程度上柔化运动轨迹,减小系统的抖振,使各关节的跟踪速度加快。方法 2 与方法 3、本文方法之间的区别主要在于是否引入虚拟主轴。方法 3 和本文方法之间的区别主要是选用的虚拟主轴类型不同,前者选用平均值型虚拟主轴,后者选用方差型虚拟主轴。在同时选取分数阶趋近律同步控制策略的前提下,本文方法采用方差虚拟主轴分数

阶趋近律同步控制策略鲁棒性强、控制精度更高、控制效果更好。

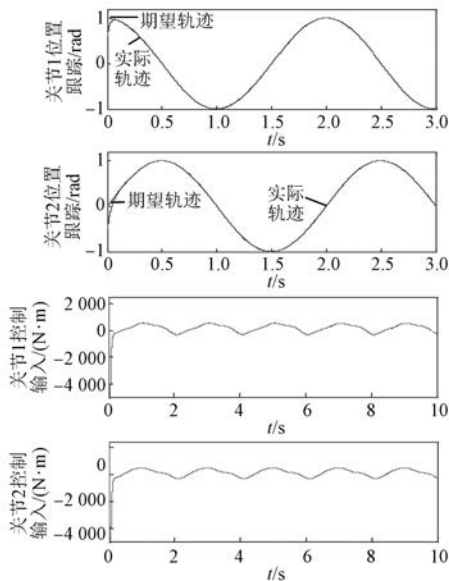


图 5 本文方法跟踪轨迹和控制输入曲线

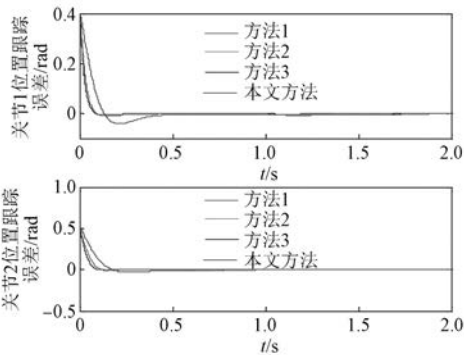


图 6 4 种同步控制策略的位置误差变化曲线对比

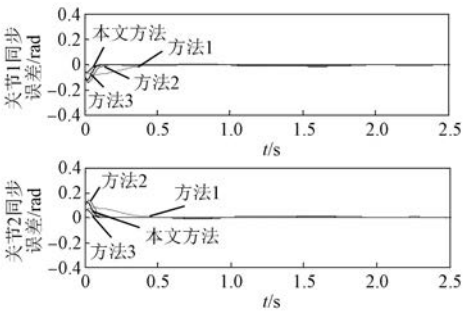


图 7 4 种同步控制策略的同步误差变化曲线对比

为了更直观地说明本文所提出控制策略优于其他 3 种同步控制策略,选取角位移调整时间(角

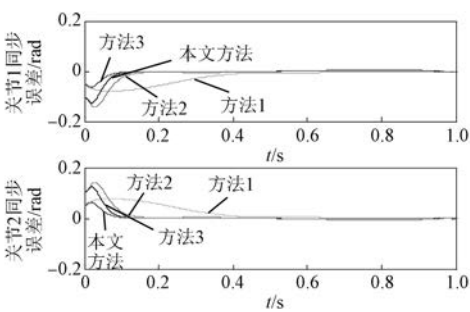


图 8 4 种同步控制策略的同步误差局部放大曲线

位移从初始状态到跟踪误差 ≤ 0.01 rad 所需要的时间^[19]、起始值的绝对值、同步误差的均方根误差(衡量观测值与真值之间的偏差)作为性能指标,分析结果如表 2~表 4 所示。

表 2 角位移调整时间 s				
结果	方法 1	方法 2	方法 3	本文方法
关节 1	0.456	0.229	0.102	0.102
关节 2	0.503	0.211	0.109	0.109

表 3 起始值的绝对值 rad				
结果	方法 1	方法 2	方法 3	本文方法
关节 1	0.053	0.104	0.104	0.053
关节 2	0.053	0.104	0.104	0.053

表 4 1 s 后同步误差的均方根误差 rad				
结果	方法 1	方法 2	方法 3	本文方法
关节 1	0.009 8	0.008 8	0.002 1	0.001 7
关节 2	0.009 8	0.008 8	0.002 1	0.001 9

在选取分数阶趋近律同步控制策略的前提下,引入虚拟主轴(方法 3、本文方法)使机械臂系统的角位移调整时间比方法 2 缩短了 0.127 s。在同时选取平均值虚拟主轴的条件下(方法 1、方法 3),与 PD 同步控制策略相比,采用分数阶趋近律同步控制策略可以使系统的抖振减小,使各关节的跟踪速度加快。在同时选取分数阶趋近律同步控制策略的前提下(方法 2、方法 3、本文方法),相比与无虚拟主轴和平均值虚拟主轴相比,采用方差虚拟主轴可以减小误差起始值的绝对值,还可以使同步误差的均方根误差更小,说明本文方法离散度小,性能更好。

5 结 语

本文为了提高机械臂各关节运动轨迹的跟踪

精度和同步精度,提出了基于方差虚拟主轴的分数阶趋近律同步控制策略,并进行了仿真对比分析,得出如下结论:

(1) 本文引入不同于传统趋近律的分数阶趋近律,平滑特性优良,可以在一定程度上柔化运动轨迹,减小系统的抖振,使机械臂各关节的跟踪速度加快;

(2) 与 PD 平均值虚拟主轴同步控制策略、分数阶趋近律同步控制策略和平均值虚拟主轴的分数阶趋近律同步控制策略相比,本文所提控制策略角位移调整时间较短,误差起始值的绝对值更小,还可以使同步误差的均方根误差在一定程度上减小,说明该控制策略离散度更小,控制性能更好。

【参考文献】

- [1] GALICKI M. An adaptive regulator of robotic manipulators in the task space[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(4): 1058.
- [2] ROSSOMANDO F G, SORIA C M. Adaptive neural sliding mode control in discrete time for a SCARA robot arm [J]. IEEE Latin America Transactions, 2016, 14(6): 2556.
- [3] 张俊辉,刘斌,蒋峥,等.基于改进趋近律的滑模控制在机械臂中的应用[J].高技术通讯, 2018, 28(6): 534.
- [4] DELAVARI H, GHADERI R, RANJBAR A N, et al. Fuzzy fractional order sliding mode controller for nonlinear systems [J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2010, 15(4): 963.
- [5] LI Y, CHEN Y Q, PODLUBNY I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(5): 1810.
- [6] ZHANG B T, PI Y G, LUO Y. Fractional order sliding-mode control based on parameters auto-tuning for velocity control of permanent magnet synchronous motor [J]. ISA Transactions, 2012, 51(5): 649.
- [7] HUANG J, LI H, CHEN Y Q, et al. Robust position control of PMSM using fractional-order sliding mode controller [J]. Abstract and Applied Analysis, 2012(4): 473.
- [8] 张碧陶,皮佑国.基于分数阶滑模控制技术的永磁同步电机控制[J].控制理论与应用, 2012, 29(9): 1193.
- [9] 黄家才,施昕昕,李宏胜,等.永磁同步电机调速系统的分数阶积分滑模控制[J].吉林大学学报(工学版), 2014, 44(6): 1736.
- [10] 邓立为,宋申民.基于分数阶滑模的挠性航天器姿态鲁棒跟踪控制[J].航空学报, 2013, 34(8): 1915.
- [11] 李军,管萍.双馈风力发电机的分数阶滑模控制[J].北京信息科技大学学报(自然科学版), 2018, 33(3): 66.
- [12] DADRAS S, MOMENI H. Fractional sliding mode observer design for a class of uncertain fractional order nonlinear systems [C] // Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 2011: 6925.
- [13] 缪仲翠,巨梅,党建武,等.基于分数阶滑模观测器的感应电机速度估计[J].中国矿业大学学报, 2016, 45(6): 1256.
- [14] EFE M O. A sufficient condition for checking the attractiveness of a sliding manifold in fractional order sliding mode control [J]. Asian Journal of Control, 2012, 14(4): 1118.
- [15] DELAVARI H, BALEANU D, SADATI S J. Stability analysis of caputo fractional-order nonlinear systems revisited [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67(4): 2433.
- [16] DADRAS S, MOMENI H R. Fractional terminal sliding mode control design for a class of dynamical systems with uncertainty [J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2012, 17(1): 367.
- [17] LI Y, CHEN Y Q, PODLUBNY I. Technical communique: Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems [J]. Automatica, 2009, 45(8): 1965.
- [18] 刘金琨.机器人控制系统的设计与 MATLAB 仿真 [M]. 北京:清华大学出版社, 2008.
- [19] 穆效江,陈阳舟,张利国.多关节机器人的全局快速终端模糊滑模控制[J].系统仿真学报, 2008, 20(15): 4085.

收稿日期: 2019-07-10