

电机模型中牵连运动及其动生电动势的数理表达^{*}

钟再敏, 王业勤

(同济大学汽车学院, 上海 201804)

摘要: 引入恰当的运动参考系可以简化交流电机模型推导和分析。一般地, 运动参考系下空间矢量电压方程的推导分两步: (1) 在“线圈固结坐标系”中运用法拉第电磁感应定律建立电压平衡式; (2) 通过坐标变换的方式推导运动坐标系下的电压方程。该过程数学推导严谨, 但是, 对于记忆和理解运动坐标系下的电压方程的物理意义有难度。参考力学系统中“惯性参考系”的概念, 根据法拉第电磁感应定律是否直接适用, 引入所谓的“法拉第参考系”概念, 对运动坐标系和线圈固结坐标系加以区分。对“非法拉第参考系”, 借鉴“非惯性参考系”中引入“惯性力”的做法, 引入附加“牵连运动电动势”, 以此表征运动参考系引入的牵连运动效果。

关键词: 电机模型; 法拉第电磁感应定律; 法拉第参考系; 牵连运动电动势

中图分类号: TM34 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-6540(2023)01-0030-05

doi: 10.12177/emca.2022.149

Mathematical Description of Entrainment Motion of Reference Frame and Its Electromotive Force in Motor Modeling^{*}

ZHONG Zaimin, WANG Yeqing

(School of Automotive Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: For the analysis of the AC electrical machines, it is common to introduce rotational reference frames for the simplified analysis of AC electrical machines. Traditionally, the deduction of the governing equation under the rotational reference frames involve two steps. Step1 is constructing the voltage governing equation based on Faraday's law under the "winding-fixed reference frame". Step2 is using the coordinate transformation to deduce of the governing equations under the rotational reference frame. The deduction processes are mathematically rigorous. However, it is difficult to understand and remember the physical meanings behind these mathematical equations. Inspired by the "inertial frame of reference" in the mechanical system, depending on whether Faraday's law of electromagnetic induction applies, a kind of so-called "Faraday reference frame" is introduced. It is specially used to distinguish the governing equations under the winding-fixed coordinate frame from the rotational reference frame. In this way, an additional "entrainment electromotive force" should be introduced for "non-Faraday reference frames" to characterize the effect of entrainment motion, motivated by the "inertia force" in the non-inertial frame of reference.

Key words: motor modeling; Faraday's law of electromagnetic induction; Faraday reference frame; entrainment electromotive force

0 引言

法拉第电磁感应定律是电机学的基本物理定

律之一。基本表述是, 当穿过闭合回路所围面积的磁通量发生变化时, 不论这种变化是什么原因引起的, 回路中均会产生感应电动势, 感应电动势

收稿日期: 2022-10-12; 收到修改稿日期: 2022-10-28

^{*} 基金项目: 国家自然科学基金项目(51575392)

作者简介: 钟再敏(1973-), 男, 博士, 教授, 研究方向为车用电驱动系统。

王业勤(1987-), 男, 博士, 助理教授, 研究方向为电气化交通领域的电驱动。

的大小与通过该回路的磁通量随时间的变化率成正比;感应电动势的方向可以通过楞次定律确定^[1-2]。法拉第电磁感应定律是建立交流电机定、转子绕组电压方程的基本依据。特别地,电机的分析过程中还会通过引入不同的运动坐标系来简化电压方程及方便控制算法实现。

以永磁同步电机(PMSM)定子电压方程推导为例,运动坐标系下定子电压方程的推导一般分两步^[3]。

(1) 在“定子固结坐标系”中运用法拉第电磁感应定律建立电压平衡式:

$$\mathbf{u}_s = R_s \mathbf{i}_s + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s}{dt} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{u}_s$ 为定子电压矢量; R_s 为定子绕组电阻; $\mathbf{i}_s$ 为定子电流矢量; $\boldsymbol{\psi}_s$ 为定子磁链矢量。

$\boldsymbol{\psi}_s$ 包含永磁互感磁链 $\boldsymbol{\psi}_f$ 和定子自感磁链 $L_s \mathbf{i}_s$, 即:

$$\boldsymbol{\psi}_s = L_s \mathbf{i}_s + \boldsymbol{\psi}_f \quad (2)$$

式中: L_s 为定子绕组自感。

在本文中,省略以定子固结(静止)坐标系为参考系的矢量上角标。以其他(非静止)坐标系为参考系的矢量,采用上角标明确标明其参考系。

定子磁链是一个旋转的空间矢量,其极坐标形式为

$$\boldsymbol{\psi}_s = \psi_s e^{j\theta_s} = \psi_s e^{j\theta_0} e^{j\theta_r} \quad (3)$$

式中: θ_s 为定子磁链在定子固结坐标系中的相位角, $\theta_s = \theta_0 + \theta_r$, θ_r 为转子相位角; θ_0 为定子磁链相对转子轴线的相位角。

根据求导法则,磁链的微分推导如下:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\psi}_s}{dt} &= \frac{d}{dt}(\psi_s e^{j\theta_0} e^{j\theta_r}) = \frac{d(\psi_s e^{j\theta_0})}{dt} e^{j\theta_r} + \psi_s e^{j\theta_0} \frac{de^{j\theta_r}}{dt} = \\ &= \frac{d(\psi_s e^{j\theta_0})}{dt} e^{j\theta_r} + j\omega_r \boldsymbol{\psi}_s \end{aligned} \quad (4)$$

式中: ω_r 为转子角速度, $\omega_r = d\theta_r/dt$ 。

式(4)对应的空间矢量图如图1所示。

基于此,在定子坐标系下列出定子电压方程:

$$\mathbf{u}_s = R_s \mathbf{i}_s + \frac{d(\psi_s e^{j\theta_0})}{dt} e^{j\theta_r} + j\omega_r \boldsymbol{\psi}_s \quad (5)$$

如果以“转子固结坐标系”为参考系,式(4)中第一项对应转子运动参考系下定子磁链的相对运动;第二项对应参考系引起的牵连运动,二者合

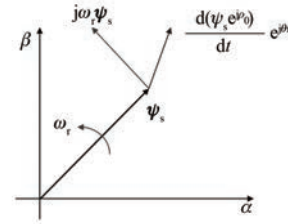


图1 定子坐标系下定子磁链的求导

成为磁链的绝对运动。电压方程式(5)表明,定供电电压分别消耗在电阻压降、转子旋转引起的动生电动势(牵连运动)和牵引定子磁链在转子坐标系内的变化(相对运动)。

(2) 显然,在定子坐标系下,上述各空间矢量均是空间上不断旋转的交变量。因此,引入转子(磁场)同步运动 dq 坐标系,即对电压方程进行频率变换。

其推导过程如下,考虑矢量变换关系:

$$\begin{cases} \mathbf{i}_s = \mathbf{i}_s^{dq} e^{j\theta_r} \\ \boldsymbol{\psi}_s = \boldsymbol{\psi}_s^{dq} e^{j\theta_r} \\ \mathbf{u}_s = \mathbf{u}_s^{dq} e^{j\theta_r} \end{cases} \quad (6)$$

式中:上角标“ dq ”为以转子同步 dq 坐标系作为参考系。

式(6)代入式(5)则有:

$$\mathbf{u}_s^{dq} e^{j\theta_r} = R_s \mathbf{i}_s^{dq} e^{j\theta_r} + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s^{dq}}{dt} e^{j\theta_r} + j\omega_r \boldsymbol{\psi}_s^{dq} e^{j\theta_r} \quad (7)$$

化简式(7)得 dq 坐标系下的空间矢量方程:

$$\mathbf{u}_s^{dq} = R_s \mathbf{i}_s^{dq} + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s^{dq}}{dt} + j\omega_r \boldsymbol{\psi}_s^{dq} \quad (8)$$

上述基于“矢量变换”的电压方程两步推导过程严谨,很多电机学教材均是基于这个逻辑建立运动参考系下的空间矢量方程。类似地,式(8)也可以通过“坐标变换”推导。但是上述推导过程较强依赖数学运算,物理意义不明确,不利于理解和记忆。

1 “法拉第参考系”与“非法拉第参考系”的概念

牛顿力学中区分“惯性参考系”和“非惯性参考系”。通常把适用牛顿运动定律的参考系叫做惯性参考系,简称惯性系;非惯性参考系是相对惯性参考系做加速运动的参考系,简称非惯性

系^[4-5]。一般地,在忽略地球自转和公转角速度的情况下(这两者均很小),惯性系可以简单选成是相对地面静止的或者做匀速直线运动的参考系,而非惯性系则是相对地面做加速或者减速运动的参考系。

以质点直线运动为例,为分析方便,非惯性系中须引入附加“惯性力”:

$$f_a = -ma \quad (9)$$

式中: a 为非惯性系相对惯性系的加速度; m 为质点的质量。

引入惯性力后,形式上,在非惯性参考系中也可以完全按照牛顿定律进行物体的力学分析了。

参照牛顿力学的惯性参考系概念,本文对电机分析里面的坐标系加以区分:(数学上)符合法拉第电磁感应定律的坐标系称为法拉第参考系,简称“法拉第系”;否则称为非法拉第参考系,简称“非法拉第系”。一般地,与线圈固结的坐标系为法拉第系,否则为非法拉第系。注意,对于电机中存在相对运动的不同绕组而言,其法拉第参考系的定义是不同的。

与非惯性系中引入惯性力的分析方法类似,在非法拉第参考系中,须补充由参考系牵连运动引起的动生电动势,然后才能按照法拉第电磁感应定律分析,在此称之为“牵连运动电动势”,简称“牵连电动势”。对于任意 DQ 旋转参考系,牵连电动势的表达式为

$$e_m = -j\omega_D \psi^D \quad (10)$$

式中: ω_D 为非法拉第系相对“线圈固结坐标系”的旋转角速度; ψ^D 为磁链在对应非法拉第系下的矢量表示;上角标“ D ”为该物理量以任意 DQ 运动参考系作为参考系。

列写电压方程时,牵连电动势正方向定义与线圈供电电压一致,写在等式的左边。

牵连电动势的推导与前面分析过程基本类似。考虑 DQ 运动参考系,其旋转角速度为 ω_D 。记定子磁链为

$$\psi_s = \psi_s e^{j\theta_s} = \psi_s^D e^{j\theta_D} = \psi_s e^{j\theta_0} e^{j\theta_D} \quad (11)$$

式中: ψ_s^D 为磁链空间矢量在 DQ 运动参考系下的表达, $\psi_s^D = \psi_s e^{j\theta_0}$,其相对 DQ 运动参考系不限于静止状态。

参照式(6)~式(8)的矢量变换过程,可以得

到 DQ 坐标系下的电压方程为

$$u_s^D = R_s i_s^D + \frac{d\psi_s^D}{dt} + j\omega_D \psi_s^D \quad (12)$$

移项后可得:

$$u_s^D + (-j\omega_D \psi_s^D) = R_s i_s^D + \frac{d\psi_s^D}{dt} \quad (13)$$

电动势 $-j\omega_D \psi_s^D$ 就是表示 DQ 运动参考系下,由于参考坐标系牵连运动引入的动生电动势项,即所谓的牵连电动势矢量。如图2所示,其数学基础就是矢量在运动坐标系下的微分由相对变化率和牵连变化率两部分组成。

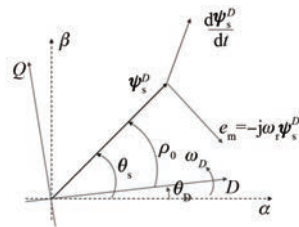


图2 任意旋转 DQ 参考系引入的牵连电动势

引入牵连电动势之后,形式上就可以直接在非法拉第系下建立电压方程,而无须由法拉第系经矢量或坐标变换得到。其基本步骤是在电压方程建立之前,先判断所分析的参考系是否属于法拉第系。若参考系为法拉第系,直接列写电压方程;若为非法拉第系,则须先在方程左边补充牵连电动势项,之后再列写电压方程。

2 基于附加牵连电动势的交流电机电压方程推导

2.1 PMSM 电压方程

仍以 PMSM 定子电压方程推导为例。考虑到磁场同步 dq 坐标系为非法拉第系,若想直接在转子同步坐标下列写电压方程,须补充牵连电动势项,其几何表示如图3所示。

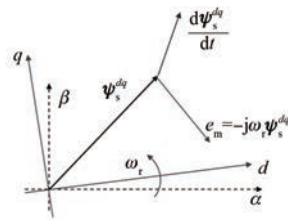


图3 PMSM dq 坐标系下的牵连电动势

考虑了牵连电动势之后,在运动坐标系(非法拉第系)下可以直接列写定子电压平衡方程为

$$u_s^{dq} + e_m = R_s i_s^{dq} + \frac{d\psi_s^{dq}}{dt} \quad (14)$$

e_m 表达式为

$$e_m = -j\omega_r \psi_s^{dq} \quad (15)$$

式(15)代入式(14)得到:

$$u_s^{dq} + (-j\omega_r \psi_s^{dq}) = R_s i_s^{dq} + \frac{d\psi_s^{dq}}{dt} \quad (16)$$

显然式(16)与式(8)相同。最终得到的电压方程对应的空间矢量几何描述如图4所示。

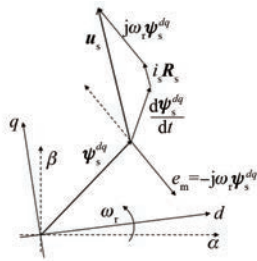


图4 PMSM dq 参考系下的电压矢量平衡

图4电压矢量图清楚地表明了,在非法拉第系下,定子电压矢量对电流和磁链的调节要首先扣除参考系牵连运动引起的牵连电动势。

2.2 感应电机电压方程

与同步电机相比,感应电机分析相关的运动参考系要复杂很多。常见的参考系包括定子固结坐标系、转子固结坐标系、磁场同步坐标系等,详见图5。

对于定子绕组而言,定子固结ABC坐标系与绕组固结,属于法拉第参考系,可直接列写静止坐标系下定子电压矢量方程:

$$u_s = R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt} \quad (17)$$

对于转子绕组而言,转子固结abc坐标系属于非法拉第参考系,可得相应转子电压矢量方程为

$$u_r^{abc} = R_r i_r^{abc} + \frac{d\psi_r^{abc}}{dt} \quad (18)$$

式中:上角标“abc”为转子abc坐标系中矢量的上标角; R_r 为每相绕组电阻。

定子固结ABC坐标系对于转子来说是非法拉第参考系,相对旋转角速度是 $-\omega_r$ 。因此,以定子固结ABC坐标系表示的转子电压方程,须附加

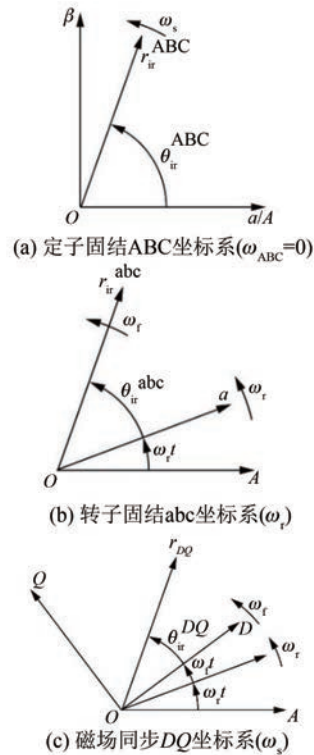


图5 感应电机不同参考系及其旋转速度^[2]

牵连电动势:

$$e_m = -j(-\omega_r) \psi_r = j\omega_r \psi_r \quad (19)$$

此时,转子电压方程为

$$u_r + j\omega_r \psi_r = R_r i_r + \frac{d\psi_r}{dt} \quad (20)$$

定子固结ABC坐标系下转子绕组附加牵连电动势几何解释如图6所示。

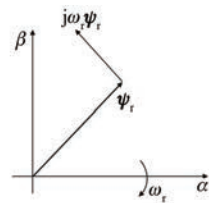


图6 定子固结ABC坐标系下转子绕组附加牵连电动势

在线圈固结坐标系下,感应电机各矢量是旋转的交变量,不易分析和控制。

为此,考虑在磁场同步旋转的DQ坐标系下建立电压矢量方程,而DQ坐标系对于定、转子绕组而言均是非法拉第系。

DQ坐标系相对定子的旋转角速度为 ω_s ,列写DQ运动坐标系下的定子电压矢量方程之前,须先附加牵连电动势 $e_m = -j\omega_s \psi_s^D$ 。最终,定子电

压平衡方程表示为

$$u_s^D - j\omega_s \psi_s^D = R_s i_s^D + \frac{d}{dt} \psi_s^D \quad (21)$$

DQ 坐标系相对转子绕组的旋转角速度为 ω_r , 列写 DQ 运动坐标系下的定子电压矢量方程之前, 须先附加牵连电动势 $e_m = -j\omega_r \psi_r^D$ 。最终, 转子电压平衡方程表示为

$$u_r^D - j\omega_r \psi_r^D = R_r i_r^D + \frac{d}{dt} \psi_r^D \quad (22)$$

相对于基于旋转变换的推导方式, 基于法拉第参考系和附加牵连电动势, 可直接在运动坐标系下列出电机电压方程, 物理意义清晰, 便于理解和工程应用。 DQ 坐标系也可以选为任意非磁场同步坐标系, 推导过程基本一致。

3 结 语

在牛顿时力学体系中, 惯性参考系和惯性力概念的引入, 极大地方便了动力学方程的推导, 特定情况下, 更可以将动力学问题转化为静力学问题, 是一个重要的分析手段。

本文介绍的方法, 创新地引入法拉第参考系

和对应的牵连运动电动势的概念, 其有益效果是赋予牵连运动引起的动生电动势明确的物理含义, 进而可以直接在任意运动坐标系中建立绕组的电压平衡方程。

上述概念方法尽管只是一类数学推导的物理解释, 但该方法数理基础是矢量微分在运动参考系下的分解, 一定程度上可以推广到其他需要引入(平动或者更复杂形式的相对运动)中间参考坐标系的类似电磁系统分析计算, 具有普遍适用性。

【参考文献】

- [1] 汤蕴璆. 电机学[M]. 5版. 北京: 机械工业出版社, 2014.
- [2] 钟再敏. 车用驱动电机原理与控制基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 2020.
- [3] 王成元, 夏加宽, 孙宜标. 现代电机控制技术[M]. 北京: 机械工业出版社, 2009.
- [4] 赵远, 王晓鸥, 张宇, 等. 大学物理学: 上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [5] 金向阳, 陈飞明. 大学物理学: 上册[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [9] 王光庆, 徐文潭, 杨斌强. T型直线超声波电动机的运行机理及其特性分析[J]. 电工技术学报, 2017, 32(15): 111.
- [10] 王鑫, 王亮, 于鹏鹏, 等. 贴片式纵弯复合型直线超声电机的理论建模与实验研究[J]. 中国电机工程学报, 2021, 41(14): 5014.
- [11] HE S, CHEN W, TAO X, et al. Standing wave bi-directional linearly moving ultrasonic motor [J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 1998, 45(5): 1133.
- [12] LE MOAL P, JOSEPH E, FERNIOT J. Mechanical energy transductions in standing wave ultrasonic motors: analytical modelling and experimental investigations[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2000, 19(5): 849.
- [13] 曲焱炎, 曲建俊, 裴建军. 驻波超声电机摩擦材料 ABAQUS 特性仿真计算与研究[J]. 电机与控制学报, 2014, 18(12): 95.
- [14] SHI Y, ZHAO C, ZHANG J. Contact analysis and modeling of standing wave linear ultrasonic motor[J]. Journal of Wuhan University of Technology (Materials Science Edition), 2011, 26(6): 1235.
- [15] LI X, CHEN Z, YAO Z. Contact analysis and performance evaluation of standing-wave linear ultrasonic motors via a physics-based contact model [J]. Smart Materials and Structures, 2019, 28(1): 015032.
- [16] 蒋春容, 董晓霄, 金龙, 等. 径向驻波型超声波电机接触摩擦特性建模与分析[J]. 中国电机工程学报, 2021, 41(17): 6081.
- [17] 刘丽兰, 刘宏昭, 吴子英, 等. 机械系统中摩擦模型的研究进展[J]. 力学进展, 2008, 38(2): 201.
- [18] MARQUES F, FLORES P, CLARO J C P, et al. A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86(3): 1407.