

基于 KPCA-K-means-GRU 的短期风电功率预测研究*

徐 艳¹, 周建勋¹, 金 鑫², 王仕通³, 易灵芝⁴

(1. 湖南电科院检测集团有限公司, 湖南 长沙 410000;

2. 湖南电器科学研究院有限公司, 湖南 长沙 410000;

3. 中国长江三峡集团有限公司湖南分公司, 湖南 长沙 410000;

4. 湘潭大学 自动化与电子信息学院, 湖南 湘潭 411100)

摘 要: 风能间歇性和波动性的特点给电网的平稳运行造成了很大的挑战, 导致电网企业限制风电并网, 造成弃风行为。因此, 实时有效地预测风力发电情况对风电开发和电网的平稳运行至关重要。在分析当前多种预测方法后, 提出了基于核主成分分析-K 均值聚类-门控循环单元(KPCA-K-means-GRU)的短期风电功率预测模型。多维数据能够较好地还原实际物理状态, 但过高维度的数据会带来维数灾难。因此, 利用非线性的 KPCA 在保留高维数据信息的同时降低数据维度。随后借鉴负荷预测相似日思路, 将降维后的数据通过 K-means 进行无监督聚类以建立不同的预测模型来提高预测精度。最后分别训练不同类别数据的 GRU 神经网络参数, 进行分类预测以获得更合适的网络模型。

关键词: 短期风电功率预测; 核主成分分析降维; 门控循环单元网络; 组合模型

中图分类号: TM614 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-6540(2023)02-0049-07

doi: 10.12177/emca.2022.171

Study on Short-Term Wind Power Prediction Based on KPCA-K-means-GRU*

XU Yan¹, ZHOU Jianxun¹, JIN Xin², WANG Shitong³, YI Lingzhi⁴

(1. Hunan Electric Power Research Institute testing Group Co., Ltd., Changsha 410000, China;

2. Hunan Electric Appliance Research Institute Co., Ltd., Changsha 410000, China;

3. Hunan Branch of China Three Gorges Group Co., Ltd., Changsha 410000, China;

4. School of automation and electronic information, Xiangtan University, Xiangtan 411100, China)

Abstract: The intermittent and fluctuating characteristics of wind energy pose a great challenge to the smooth operation of power grid, which causes grid enterprises to restrict wind power grid connection, resulting in curtailment behavior. Therefore, the real-time and effective prediction of wind power generation is critical for the development of wind power and the smooth operation of power grid. After analyzing several current prediction methods, a short-term wind power prediction model based on kernel principal component analysis-K-means clustering-gated recurrent unit (KPCA-K-means-GRU) is proposed. Multidimensional data can restore the real physical state better, but data with too high dimensions will cause dimension disaster. Therefore, a non-linear KPCA is used to reduce the data dimension while retaining the information of high dimension data. Then based on the idea of similar days for load

收稿日期: 2022-05-17; 收到修改稿日期: 2022-11-17

* 基金项目: 国家自然科学基金项目(61572416); 湖南省自然科学基金项目(2020JJ6009)

作者简介: 徐 艳(1978—), 女, 本科, 中级工程师, 研究方向为电力系统自动化。

周建勋(1967—), 男, 本科, 中级工程师, 研究方向为低压电器检测标准及技术研究。

金 鑫(1977—), 男, 本科, 助理工程师, 研究方向为中低压配电物联网应用。

prediction, unsupervised clustering of reduced dimension data by K-means is used to establish different prediction models to improve prediction accuracy. Finally, the GRU neural network parameters of different kinds of data are trained separately, and then classification prediction is carried out to obtain a more appropriate network model.

Key words: short-term wind power prediction; kernel principal component analysis (KPCA) dimension reduction; gated recurrent unit (GRU) network; combination model

0 引言

在“碳达峰,碳中和”的背景下,以风能、光能为代表的可再生能源开发前景广阔^[1-2]。但风能间歇性和波动性的特点给电网的平稳运行造成了很大的挑战,这导致电网企业限制风电并网,造成弃风行为^[3]。提高风电出力的稳定性和预测的精准性成为了亟待解决的问题,同时对风力发电做出实时有效的预测对风电开发和电网的平稳运行均至关重要。

本文主要以短期风电功率预测为研究对象,通过对0~72 h时间段的风电功率进行预测,提高电能质量。目前已有文献通过小波分解(WD)将原始时间序列分解为一系列的子数据,并用人工神经网络(ANN)进行预测^[4],该研究提出的新模型能够在单一网络模型的基础上提高预测的准确度和稳定性。文献[5-7]通过引入粒子群优化算法(PSO)和遗传算法(GA)对神经网络的参数进行无监督寻优,通过群智能算法强大的搜索能力为神经网络匹配了合适的模型参数,达到了提高风电预测精度的目的。但是在学习网络参数时,群智能算法可能陷入局部最优。

上述文献虽然提出多种了针对短期风电功率预测模型的改进策略,但大多数仅考虑了历史发电数据单一变量,忽视了影响发电量的多种环境因素。风速、气压等多种天气因素结合历史功率数据可以更好地还原真实物理情景。通过K均值聚类(K-means)对数据进行无监督聚类并根据日期将风电出力情况划分为不同的类别,最后再根据深度神经网络对数据进行拟合。试验数据均选择湖南省某风电场2021年的实测数据,通过试验和对比证明了本文提出的方法具有较好的精度和鲁棒性。

1 数学模型

1.1 主成分分析(PCA)与非线性核主成分分析(KPCA)

随着科技的发展,风电功率预测的技术不断

进步。传统的风电信息获取只能依靠人工对环境信息进行测量,但随着数值天气预报(NWP)系统的发展,可以轻松获得更加精准、及时且全面的天气信息。目前的NWP系统包括温度、气压、10 m风速、50 m风速、100 m风速等多种信息。虽然更多的信息能够更真实地反映实际情况,但如果不将这些信息加以处理而全部输入模型中,则会导致模型的鲁棒性降低及运行速度变慢,从而使预测系统不能应用于实际。若仅采用单一的维度进行分析,则可能遗漏关键信息,导致预测精度下降。目前,一般采用降维的思想对多维数据进行处理。降维技术是将所有的信息统一到一个框架中,通过该框架提取数据的关键特征,消除众多数据的冗余部分,在保留关键信息的同时合理降低数据的维度,避免发生维数灾难。

PCA是一种基于特征向量搜索的无监督学习方法,目前已成功应用于多种领域的监测,其能够通过映射,在保留关键信息的同时降低数据的维度^[8-9]。总体来讲,PCA具有以下几个特点:

(1) 经过PCA后的变量个数比原有变量个数少,通过对原有变量主成分的提取,在保持原有数据特征的同时减少了数据的维度,避免了维数灾难,提高了计算效率;

(2) PCA不改变原有数据蕴含的信息,其虽然能够降低数据的维度以增加计算的效率,但并不是单纯地对数据进行删除,而是对原有变量进行线性投影后,将高维度的数据投射到低维的空间中达到降维的目的;

(3) PCA各个主成分之间具有互不相关性,其得到的每个主成分都是对原有数据投影后得到的结果。

1.2 皮尔逊相关系数(PCC)分析

PCC是一种衡量变量间相关性的指标^[10]。对本文使用的NWP数据(包含风向、湿度、气压、平均风速、功率)进行PCC分析,试验结果如图1所示。皮尔逊公式的表达式为

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (1)$$

式中: $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$ 分别为变量 X 和变量 Y 的均值; $P \in (0, 1)$, 变量 X 和变量 Y 的相关性与 P 正相关。

图 1 表明多维数据中仅风速和功率之间有较强的相关性, 其余数据的线性相关程度较低, 因此不宜采用线性降维。

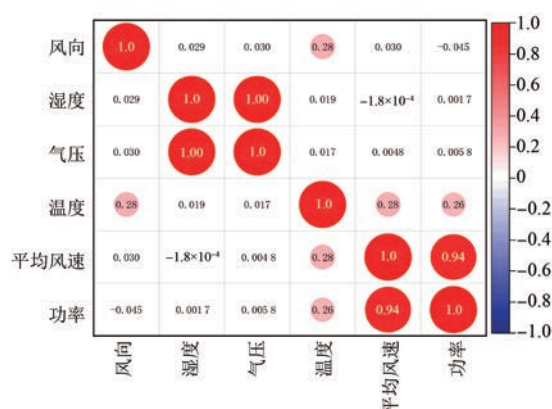


图 1 NWP 变量线性相关性分析混淆矩阵图

PCA 通过对原始数据进行线性化的变化达到数据降维的目的, 相较于 PCA, KPCA 解决了特征向量线性不可分的问题, 在适应线性化问题的同时提供了更多的特征数目, 并通过映射函数非线性化的方式对主成分进行提取。假如原始维度空间中存有数据点 L_x , 则可以借助映射函数将其映射到高维度空间 F 。映射函数为 $L_x \rightarrow \phi(x) \in F$, 核函数的定义为原始空间中的点在映射空间的距离:

$$k(L_{x_i}, L_{x_j}) = \phi(L_{x_i}) \phi(L_{x_j}) \quad (2)$$

在 F 特征空间上的协方差矩阵 M 为

$$M = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\phi_i - u)(\phi_i - u)^T \quad (3)$$

其中, $\phi_i = \phi(x_i)$, $u = \frac{1}{m} \sum_i \phi_i$ 。

对于 M 矩阵中的某一特征向量 v 及其对应的特征值 λ , 有 $Mv = \lambda v$, v 是 $\{\phi_i - u\}$ 生成的特征空间中的特征向量:

$$v = \sum_i \alpha_i (\phi_i - u) \quad (4)$$

因为公式两边都在 $\{\phi_i - u\}$ 生成的 F 空间中, 故用下式替代:

$$(\phi_i - u)^T C v = \lambda (\phi_i - u)^T v \quad (5)$$

核矩阵 H 的元素 $H_{i,j} = \phi_i \phi_j$, $i, j = 1, 2, \dots, m$ 。通过给定的核函数可以得到对应的 F 空间点积, 即 $\phi_i \phi_j = k(x_i, x_j)$ 。做因子分析时需要中心化之后的核矩阵 H^C 表达式:

$$H^C = P_d K P_d \quad (6)$$

式中: $P_d = \mathbf{1} - \frac{1}{m} \mathbf{e} \mathbf{e}'$, $\mathbf{1}$ 为 m 阶的单位矩阵, $\mathbf{e}$ 为 m 维的单位列向量。

最后对数据点的非线性主成分进行如下的求解:

$$[\phi(x_k) - u] \cdot v = \lambda \alpha_k \quad (7)$$

因为采集变量不同, NWP 数据集存在量纲不同的问题, 同时风电数据较大的波动性会对预测的精度和速度产生不良的影响, 甚至造成无法收敛的问题。

为了降低上述负面影响, 本文将对数据集的各数据变量使用 min-mix 标准归一化方案, 同时选择在分子上 +1 防止归一化后的数据出现零值:

$$x_{\text{norm}} = \frac{x - x_{\min} + 1}{x_{\max} - x_{\min}} \quad (8)$$

式中: x_{norm} 为归一化的结果; $x_{\min}$ 与 $x_{\max}$ 分别为数据集变量的最大、最小值。

KPCA 方法可以通过各主成分的贡献率判断算法的目标维数^[11]。使用 KPCA 对归一化后的数据集进行分析, 结果如表 1 和图 2 所示。在表 1 中, 9 个主要组成部分的贡献率和累计贡献率主要集中在前 3 类, 且前 3 类的累计贡献率已经达到了 99.84%。从图 2 可以看出, 在第 3 个主成分后累计贡献率上升非常缓慢。

表 1 各主成分贡献率

主成分	贡献率/%	累计贡献率/%
1	93.17	93.17
2	3.63	96.80
3	2.36	99.16
4	0.07	99.86
5	0.05	99.91
6	1.84×10^{-2}	99.99
7	1.01×10^{-2}	100.00
8	2.36×10^{-4}	100.00
9	7.49×10^{-5}	100.00

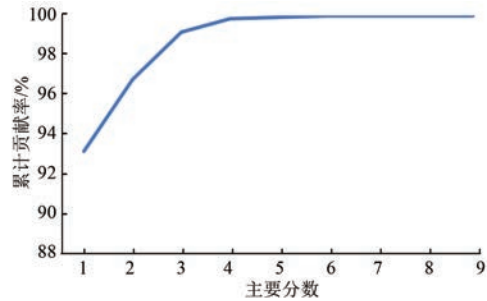


图2 主成分累计贡献率

2 基于 K-means 的预测类别划分

负荷预测主要特征包括天气、季节和当天是否属于节假日等因素^[12],在负荷预测中,学者们将具有相似特征的日期聚合在一起。本文将具有相似天气和功率曲线的数据集进行聚类得到不同的类别,分别对不同的类别进行训练以获得最佳的网络参数。本文采用 K-means 方法对数据进行无监督的聚类,K-means 在进行聚类时需要随机选取 K 个点并将其指定为聚类中心点,根据其余样本与这些聚类中心点的欧式距离,将其归为不同的类别。欧式距离如下所示:

$$d(X,Y)=\sqrt{\sum (x_i-y_i)^2} \quad i=1,2,\cdots,n \quad (9)$$

式中: x_i 、 y_i 分别为样本 X 、 Y 的第 i 个变量。

K 值的确定方法分为手肘法和轮廓系数法。手肘法的自动化程度低,面对海量数据时效率亟待提升。轮廓系数法根据聚类的凝聚度和分离度进行 K 值的判断,不同 K 值对应的轮廓系数如表 2 所示。通常轮廓系数的值在 $-1 \sim 1$ 之间,轮廓系数数值越大则表明聚类效果越好,不同的聚类效果如图 3~图 5 所示。

表 2 不同 K 值对应的轮廓系数

K 值	2	3	4	5
轮廓系数	0.656 8	0.695 5	0.509 7	0.461 4
K 值	6	7	8	9
轮廓系数	0.483 2	0.490 7	0.457 0	0.463 8

本文采用 15 min 为间隔的实测风电数据进行试验,每月的最后 3 天作为预测数据,其余作为历史数据,通过轮廓系数的比较来确定 K 值。当 $K=3$ 时,轮廓系数为 0.695 5。通过比较,本文将 K 取值为 3,即根据聚类中心数,本文数据集可细

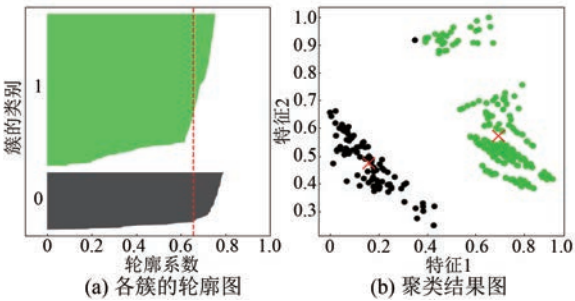


图3 K 为 2 时对应的聚类效果

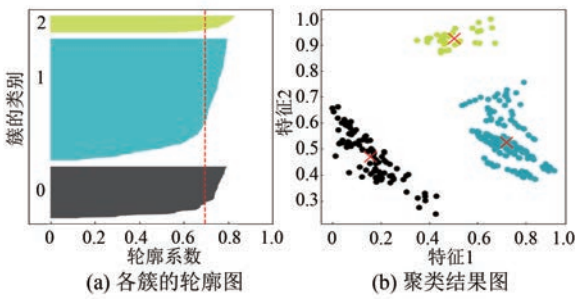


图4 K 为 3 时对应的聚类效果

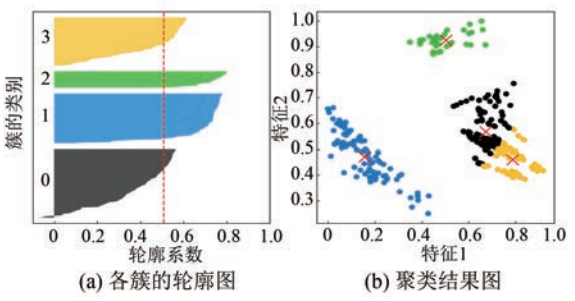


图5 K 为 4 时对应的聚类效果

分为 3 种类型。

首先,选择降维后的数据,根据向量间的欧式距离确定具体类别,具体如下:

$$d_i = \sqrt{\sum_{k=1}^3 [\mathbf{x}_m(k) - \mathbf{x}_i(k)]^2} \quad (10)$$

式中: $\mathbf{x}_m(k)$ 为预测目标降维后的向量; $\mathbf{x}_i(k)$ 为历史数据样本降维后的向量。

以 5 月 1 日~20 日为例,由式(10)计算出欧式距离并判断出样本所属的类。有 13 天样本数据属于第 1 类数据,有 4 天样本数据属于第 2 类数据,有 3 天样本数据属于第 3 类数据,具体分布如表 3 所示。降维前后数据类型对比如表 4 所示。

3 门控循环单元(GRU)网络模型

循环神经网络(RNN)的特点是每一层的神元都可以进行反馈,进而实现信息的传递。与

表 3 历史数据样本日所在聚类情况(K=3)

历史数据样本日	所属类别	历史数据样本日	所属类别
5月1日	1	5月11日	1
5月2日	3	5月12日	2
5月3日	1	5月13日	1
5月4日	3	5月14日	1
5月5日	3	5月15日	2
5月6日	1	5月16日	1
5月7日	2	5月17日	1
5月8日	1	5月18日	1
5月9日	1	5月19日	1
5月10日	2	5月20日	1

表 4 降维前后数据维度对比

数据类别	数据维度(降维前)	数据维度(降维后)
风向		
湿度		
气压	5	2
温度		
平均风速		

其他的神经网络不同的是,RNN 构建的网络会对历史时刻的信息进行记忆,并将记忆留下的信息应用到当前神经元的输入计算中。这使得 RNN 对时间序列预测的效果较好。但 RNN 长期依赖问题会导致梯度消失或梯度爆炸等,进而导致模型无法训练^[13]。GRU 神经网络结构由更新门和重置门组成,保留 RNN 对时间序列优秀的处理能力,解决了梯度消失和爆炸的问题,实现了信息在网络上的长期流动,通过对网络模型结构优化减少了模型参数,同时减少了时间序列处理的步骤。在本文中,输入量为经过降维聚类后的数据,利用 3 类数据训练 3 种 GRU 模型。并将 GRU 网络模型的隐藏层 hidden 设置为 3,循环次数 epoch 设置为 100,loss 采用 mse。GRU 神经网络的整体结构图如图 6 所示^[14],在图 6 中,当前时刻的输入以 x_t 来表示;经过 C_t 的隐藏层处理后,输出以 y_t 来表示。

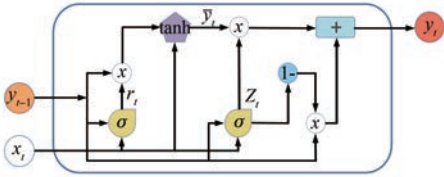


图 6 GRU 神经网络结构示意图

GRU 神经网络的计算方式如下所示:

$$r_t = \sigma(W_r \cdot [y_{t-1}, x_t]) \tag{11}$$

$$\bar{y}_t = \tanh(W_r \cdot [r_t \cdot y_{t-1}, x_t]) \tag{12}$$

$$h_t = (1 - z_t) * y_{t-1} + z_t * \bar{y}_t \tag{13}$$

式中: r_t 为更新门输出; $\bar{y}_t$ 为当前时刻待定输出值; σ 为激活函数; W_r 为参数权重。

4 基于 KPCA-K-means-GRU 的功率预测模型性能分析

对数据降维后的训练集进行聚类,划分不同的类别,并训练不同的 GRU 模型参数。将预测集按照同样的方法划分类别并进行匹配。并将匹配结果输入神经网络进行预测,具体流程如图 7 所示。同时为了验证本文所提 KPCA-K-means-GRU 组合模型在超短期风电功率预测中的优越性,试验中分别与支持向量机(SVM)、极限学习机(ELM)以及 GRU 神经网络进行对比。通过对多维的数据进行聚合降维,本文模型将具有相同特征的风电数据划分为不同的类别,提高了模型的拟合能力,降低了功率预测的难度,在预测结果的精确度和鲁棒性上均具有优势。

本文选择采用均方误差(RMSE)和平均绝对百分比误差(MAPE)两个指标来进行预测模型性能指标的对比。

RMSE 的表达式为

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [Y'(t) - Y(t)]^2} \tag{14}$$

MAPE 表达式为

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{Y'(t) - Y(t)}{Y(t)} \right| \times 100\% \tag{15}$$

式中: n 为预测样本数; $Y'(t)$ 为预测结果; $Y(t)$ 为实际值。

该预测模型将 t 时刻的多个变量数据输入,将 $t-1$ 时刻除功率外的其余变量作为训练样本的

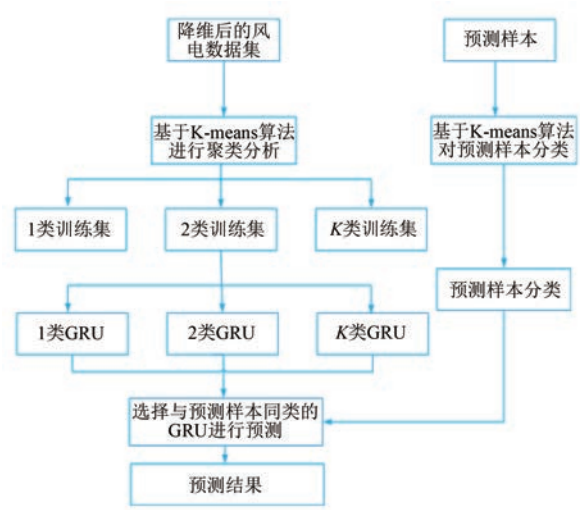


图7 KPCA-K-means-GRU 预测模型框架

特征, $t+1$ 时刻的发电功率作为训练样本的目标。在 K 取 3 时, 其他参数保持不变, 将本文提出的 KPCA-K-means-GRU 模型与其他模型进行性能对比, 每个模型运行 10 次后得到的误差取平均值。

表 5 展示了本文提出的模型与其他模型在预测相同数据时的误差效果对比。与其他模型相比, 本文所提组合模型的误差的平均值、最大值、最小值均比其他方法小。说明本文提出的方法具有较高的预测精度。

表 5 不同月份、不同方法下 RMSE 与 MAPE 对比

月份	模型	RMSE	MAPE
1 月	SVM	316.522	27.615
	ELM	276.413	30.169
	GRU	239.655	17.613
	本文模型	171.186	13.422
3 月	SVM	274.693	26.362
	ELM	267.314	23.137
	GRU	231.183	10.262
	本文模型	179.161	9.597
5 月	SVM	269.339	30.174
	ELM	231.461	32.961
	GRU	278.324	13.597
	本文模型	175.529	8.691

通过图 8 可以看出, 本文提出的模型在数据拟合方面表现出更优的效果, 在数据极值点附近的预测误差进一步降低。本文将 5 月份预测得到

的 RMSE 和 MAPE 值通过箱型图展示, 如图 9 与图 10 所示, 箱型图能够直观地展示模型的精度以及鲁棒性, 箱型图越低, 证明预测精度越好, 箱型图的长度越短, 表示该模型的稳定性越好, 给出的预测结果越稳定。可以看出本文提出的方法在 10 次试验中均表现出较低的预测误差, 本文方法的预测效果比其他方法具有明显的优势, 说明提出的方法在具有较高精度的同时具有较好的稳定性。

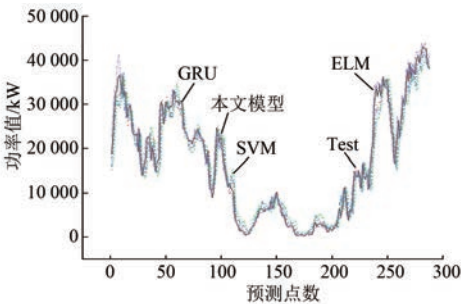


图8 5月份不同模型预测结果

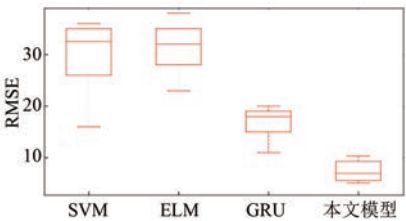


图9 5月份不同模型预测误差 RMSE

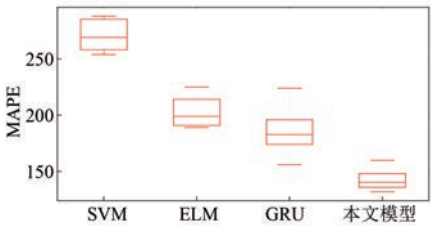


图10 5月份不同模型预测误差 MAPE

5 结 语

本文针对风电短期功率预测建立分类再预测模型, 数据采用湖南省某风电场提供的 2021 年实际数据, 得出如下结论。

(1) 高维度的数据集能够更真实地反映实际情况。但原始数据集的维度较高, 在进行数据处理时会增加处理时间, 降低模型的实用性。KPCA 能够在保留数据信息的同时降低数据集维度。

(2) K-means 算法能够将降维后的数据分类,通过分别训练不同类别的数据可以得到更合适的网络参数。

(3) 通过与其他模型对比,证明了本文提出的模型具有较高的预测精度以及鲁棒性,说明了该模型是切实可行的。

【参考文献】

- [1] 庄贵阳, 窦晓铭, 魏鸣昕. 碳达峰碳中和的学理阐释与路径分析[J]. 兰州大学学报(社会科学版), 2022, 50(1): 57.
- [2] 叶林, 路朋, 赵永宁, 等. 含风电电力系统有功功率模型预测控制方法综述[J]. 中国电机工程学报, 2021, 41(18): 6181.
- [3] 朱蓉, 王阳, 向洋, 等. 中国风能资源气候特征和开发潜力研究[J]. 太阳能学报, 2021, 42(6): 409.
- [4] 陈裕, 张怡, 谢俊峰. 自适应滑动平均与小波包分解平抑风电波动[J]. 控制工程, 2021, 28(7): 8.
- [5] 王晓东, 苗宜之, 刘颖明, 等. 基于多分解策略和误差校正的超短期风电功率混合智能预测算法[J]. 太阳能学报, 2021, 42(6): 312.
- [6] 王粟, 邱春辉, 曾亮. 自适应变异粒子群优化 BP 的短期风电功率预测模型[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2020, 41(1): 90.
- [7] 朱永超, 朱才朝, 宋朝省, 等. PCA-PSO/GS-SVM 组合方法在风电齿轮箱故障预测中的应用研究[J]. 太阳能学报, 2021, 42(3): 35.
- [8] KE X, CHENG C. Feature selected based on PCA and optimized LMC [J]. MATEC Web of Conferences, 2021, 336(16): 06034.
- [9] 唐加山, 段丹丹. 文本分类中基于 CHI 和 PCA 混合特征的降维方法[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2022, 34(1): 8.
- [10] 纪德洋, 金锋, 冬雷, 等. 基于皮尔逊相关系数的光伏电站数据修复[J]. 中国电机工程学报, 2022, 42(4): 1514.
- [11] 肖白, 邢世亨, 王茂春, 等. 基于改进 KDE 法和 GA-SVM 的多风电场聚合后输出功率长期波动特性预测方法[J]. 电力自动化设备, 2022, 42(2): 77.
- [12] 李滨, 高枫. 基于虚拟相似日与 DA-LSTPNet 的地区电网短期负荷预测[J]. 电力系统自动化, 2021, 45(22): 55.
- [13] LI B, HE Y. An attention mechanism oriented hybrid CNN-RNN deep learning architecture of container terminal liner handling conditions prediction [J]. Computational Intelligence and Neuroscience, 2021, 2021: 3846078.
- [14] CHEN P, DENG Y, ZHANG X, et al. Degradation trend prediction of pumped storage unit based on MIC-LGBM and VMD-GRU combined model [J]. Energies, 2022, 15(2): 605.
- [8] 苑一祥, 周文祥, 孔振文, 等. 高速动车组运动模型永磁涡流制动解析方法研究[J]. 现代城市轨道交通, 2020(11): 105.
- [9] EDWARDS J D, JAYAWANT, DAWSON W R C, et al. Permanent-magnet linear eddy-current brake with a non-magnetic reaction plate [J]. IEE Proceedings-Electric Power Applications, 1999, 146(6): 627.
- [10] 肖尧, 吴峻. 电磁飞机弹射系统永磁涡流制动装置的分析与设计[J]. 微特电机, 2013, 41(8): 10.
- [11] CHEN Q, TAN Y, LI G, et al. Design of double-sided linear permanent magnet eddy current braking system[J]. Progress in Electromagnetics Research M, 2017, 61: 61.
- [12] 陈殷, 李耀华. 一种用于真空管道高速磁浮的涡流制动装置分析与设计[J]. 中国电机工程学报, 2020, 40(5): 1683.
- [13] 陈殷, 张昆仑. Halbach 永磁阵列空间磁场的解析计算[J]. 磁性材料及器件, 2014, 45(1): 1.
- [14] 陈殷. 低速永磁电动悬浮电磁力特性研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2015.
- [15] 雷银照. 时谐电磁场解析方法[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [16] MELCHER J R. Continuum electromechanics [M]. Cambridge: The MIT Press, 1981.
- [17] KIM W J. High-precision planar magnetic levitation [D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1997.
- [18] 宋玉晶, 张鸣, 朱煜. Halbach 永磁阵列磁场解析求解及推力建模[J]. 电工技术学报, 2014, 29(11): 61.

(上接第 40 页)