

宽转子无轴承开关磁阻电机的计及磁饱和 径向力模型

周云红, 谭正一*, 王 东, 李汉杰
(南京工程学院 电力工程学院, 江苏 南京 211167)

Radial Force Modeling of a Bearingless Switched Reluctance Motor with Wide Rotors Considering Magnetic Saturation

ZHOU Yunhong, TAN Zhengyi*, WANG Dong, LI Hanjie

(School of Power Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China)

Abstract: The existing mathematical models based on the assumption of magnetic unsaturation for bearingless switched reluctance motors have limitations, as they are only suitable for non-magnetically saturated conditions. A comprehensive radial force mathematical model is developed for a wide rotor single-winding bearingless switched reluctance motor, taking into account the effects of magnetic saturation. Firstly, based on the finite element analysis of the motor's magnetic field, the expression for the radial force in terms of the air gap magnetic density is derived using the Maxwell stress method. Next, the nonlinear magnetization characteristics of the iron core material are fitted, and the air gap magnetic density, accounting for the effects of magnetic saturation, is calculated using the motor's equivalent magnetic circuit. Subsequently, the radial force model of the motor is established. After comparing and analyzing the influence of edge air gap magnetic density and main air gap flux density on the radial force, the developed radial force model is simplified to reduce computational complexity. Finally, the model is validated through finite element analysis. The results indicate that the established radial mathematic model is applicable to the motor under conditions of magnetic unsaturation, partial magnetic saturation, and complete magnetic saturation. The development of a full-period radial force model considering magnetic saturation provides a more accurate theoretical

reference for the analysis of motor operating characteristics, structural optimization design, and control strategy research.

Key words: switched reluctance motor; bearingless motor; wide rotor; radial force mathematical model; magnetic saturation; full period

摘 要: 针对无轴承开关磁阻电机现有的基于无磁饱和和假设的数学模型只适用于未磁饱和工况的缺点,为宽转子单绕组无轴承开关磁阻电机建立了一种可以计及磁饱和和影响的全周期径向力数学模型。首先依据该电机的磁场有限元分析结果,基于麦克斯韦应力法求出了径向力关于气隙磁密的表达式;然后对铁心材料的非线性磁化特性进行拟合,再根据该电机的等效磁路计算了计及磁饱和影响的气隙磁密;之后建立了该电机的径向力模型,并在对比分析了边缘气隙磁密和主气隙磁密对径向力的影响后,对所建径向力模型进行简化,以减小计算量和复杂度。最后利用三维有限元分析进行验证,结果表明所建径向力模型对该电机未磁饱和、部分磁饱和以及完全磁饱和工况均适用。计及磁饱和的全周期径向力模型的建立,可以为电机运行特性分析、本体优化设计以及控制策略研究提供更准确的理论参考。

关键词: 开关磁阻电机; 无轴承电机; 宽转子; 径向力模型; 磁饱和; 全周期

0 引言

二十一世纪前后,无轴承开关磁阻电机(Bearingless Switched Reluctance Motor, BSRM)因继承了普通开关磁阻电机结构简单、容错性好、效率高、更易于维护以及更利于高转速运行等优点,而备受国内外研究者的重视。

基金项目: 国家自然科学基金项目(51977103);江苏省重点研发计划项目(BE2021094);南京工程学院科技创新基金项目(YKJ202208)

National Natural Science Foundation 51977103); Key R&D Plan Project in Jiangsu Province (BE2021094); Science and Technology Innovation Fund of Nanjing Institute of Technology (YKJ202208)

由于 BSRM 没有传统机械轴承,在进一步提高效率与高转速区间运行优势的同时,也对控制提出了更高的要求,绕组电流不仅仅要提供拖动转子旋转的转矩,还要提供转子悬浮所需的径向力。文献[1]提出了一种双绕组无轴承开关磁阻电机(Double-Winding Bearingless Switched Reluctance Motor, DWBSRM),两套绕组间存在复杂的耦合影响,需要特别的控制方法来进行解耦控制。针对 DWBSRM,文献[2]选择了一种能计及相互垂直方向悬浮力耦合的积分路径,揭示了相互垂直方向上径向悬浮力的耦合关系,建立了径向力数学模型。文献[3]基于等效磁路法对 DWBSRM 建立了两相导通的数学模型。

为改进 DWBSRM 结构复杂的缺点,文献[4]提出了一种单绕组无轴承开关磁阻电机(Single-Winding Bearingless Switched Reluctance Motor, SWBSRM),其结构与普通 SRM 类似,具有结构上的通用性,但转矩脉动依然较大。针对 SWBSRM 转矩脉动大的缺点,文献[5]同时为 12/8 极开关磁阻电机的转子和定子分别开圆形槽和矩形槽,对现有 SRM 结构的改动小,但对 SRM 振动抑制有较好的效果。文献[6-7]改变了传统的定子结构,引入了不等宽的定子极,其中宽定子极上的绕组电流控制悬浮力,窄定子极上的绕组电流控制转矩,大大减小了转矩与悬浮力之间的耦合。在此基础上,文献[8-9]采用了内外双定子的方案实现了转矩与悬浮自解耦。其中文献[8]同时对内外定子极、转子极开窗,进一步减小了转矩脉动。文献[10]提出了一种 12/14 极的不等宽定子极结构,优化了电磁路径,在实现转矩与悬浮力解耦的同时,还进一步提高了转矩密度,降低了铁心损耗。文献[11]研究了锥形电机,其定、转子极并非传统的矩形而是存在倾斜角,转子受到的电磁力可以分解为转动力矩与径向力。其中文献[12]研究了一种宽转子单绕组无轴承开关磁阻电机(Single-Winding Bearingless Switched Reluctance Motor with Wide Rotor, BSRMWR),其绕组电感存在平顶区,通过双相导通可实现悬浮力与电磁转矩的解耦控制。

径向力是无轴承开关磁阻电机的重要性能指标,求解径向力常见的有麦克斯韦应力法、虚位移法以及等效磁路法等。针对传统

SWBSRM,文献[13]基于有限元分析和麦克斯韦应力法,揭示了 12/14 极 SWBSRM 悬浮力的非线性时变规律,并建立了考虑磁饱和的数学模型。文献[14]提出了基于思维进化算法优化的反向传播神经网络算法的 SRM 非线性模型,更好地反映电机运行时的磁链特性和转矩特性;文献[15]运用了磁导法,建立了分段函数形式的全周期径向力模型。文献[16]研究了一种共悬浮绕组式单绕组开关磁阻电机(Sharing-Suspension-Windings Bearingless Switched Reluctance Motor, SSWBSRM),并基于等效磁路法推导了考虑磁链饱和的转矩模型。文献[17]则是从麦克斯韦应力法的角度建立了 BSRMWR 的径向力和转矩模型。文献[18]在不考虑磁饱和的情况下运用麦克斯韦应力法建立了 BSRMWR 的全周期径向力模型。文献[19]综合等效磁路法和麦克斯韦应力法,精确计算了 SRM 气隙磁通密度,得出了单相激励下定子径向电磁力的表达式,从而减少了误差。

考虑到无轴承开关磁阻电机经常在磁饱和状态工作,本文在文献[18]的基础上,以宽转子单绕组无轴承开关磁阻电机为研究对象,对铁心的磁化曲线进行拟合,结合麦克斯韦应力法推导了考虑磁饱和的径向力模型,并使用三维有限元仿真计算与所建立的径向力数学模型进行对比,验证了模型的有效性。该模型的建立可以提高对磁饱和工况的适用性。

1 BSRMWR 基本结构与运行原理

以三相 12/8 极 BSRMWR 为例,基本结构如图 1 所示(略去了 B、C 相绕组),定子极弧为 15° ,转子极弧为 30° ,转子极弧宽于定子极弧。径向 x 、 y 轴方向上的四个定子极 A1~A4 上的绕组共同构成 A 相绕组,电流分别记作 $i_{A1} \sim i_{A4}$,对应的气隙分别为 $a1 \sim a4$ 。区别于普通 SRM,同相内的四极绕组互不连接,电流都单独控制,以便通过双相导通实现径向力与旋转力矩的解耦控制,其中一相作为转矩相,另一相作为悬浮相^[18]。图中还标示出了 A、B、C 相绕组分别产生的两自由度径向力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_{Bx} 、 F_{By} 、 F_{Cx} 、 F_{Cy} 与 x 轴和 y 轴的位置关系,其中相邻的两个力之间的夹角都为 30° 。

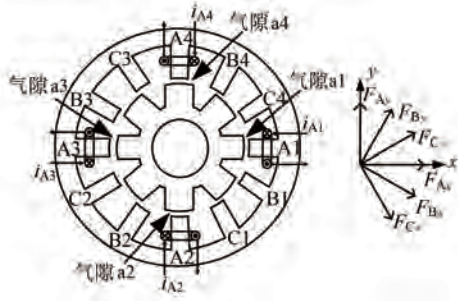


图1 BSRMWR 基本结构示意图

Fig.1 Basic structure diagram of BSRMWR

2 电感及径向力特性分析

2.1 电感特性

定义逆时针方向为转子旋转正方向。普通的 SWBSRM 中,转子极弧小于或者等于定子极弧,随着转子旋转,相电感变化规律如图 2(a) 所示。由于相电感正比于定、转子极的对齐面积,而在区域 II 内转子极与该相定子极的重叠面积逐渐增大,因此相电感也相应线性增加,直至转子极与该相定子极完全重合时相电感获得最大值;在区域 III 内,转子极与该相定子极的重叠面积逐渐减小,因此相电感也线性减小;在区域 I 和 IV 内,转子极与该相定子极完全错开,重叠面积为零,因此相电感维持最小值。

当要求产生正转矩时,宜选择区域 II 进行励磁;当要求产生负转矩时,则宜选择区域 III 进行励磁。区域 II 和区域 III 中电感较大的区段是悬浮有效区,通过不对称励磁可取得较大的悬浮力。在实际控制过程中,通常是采用单相导通模式,因此在选择绕组的励磁区域时需要在转矩有效区和悬浮有效区之间进行折中,以便兼顾转矩和径向力要求。二者互相制约,且瞬时转矩与径向力之间还会存在严重的耦合影响。

在 BSRMWR 中,转子极弧大于定子极弧,随着转子旋转,相电感变化规律如图 2(b) 所示。区别于图 2(a),可以看出相电感曲线中出现了一个平顶区域 V,期间相电感维持最大值,这是由于在此区间内,转子极与该相定子极的对齐面积始终保持与定子极弧相等。在区域 V 内,通过不对称励磁可取得较大的悬浮力,因此可用作悬浮有效区。悬浮有效区与转矩有效区相互独立,不再互相制约。

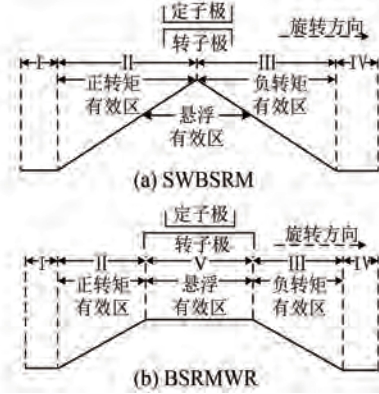


图2 电感曲线示意图

Fig.2 Inductance curve schematic

不同于传统 SWBSRM 的单相导通模式,BSRMWR 通过双相导通实现其瞬时转矩与径向力的解耦控制。具体来说,根据转子位置角,选择处于转矩有效区的一相绕组进行对称励磁以产生所需转矩,相应的相称为“转矩相”;而选择处于悬浮有效区的另一相绕组进行不对称励磁以产生所需径向力,相应的相称为“悬浮相”。由于平顶区内的绕组相电感关于转子位置角的变化率为零,因此励磁后不会产生电磁转矩,对转矩相无耦合影响。

2.2 径向力特性

以 A 相为例,在未磁饱和时,因铁心材料的磁导率远远大于气隙的磁导率,因此可忽略铁心磁阻。

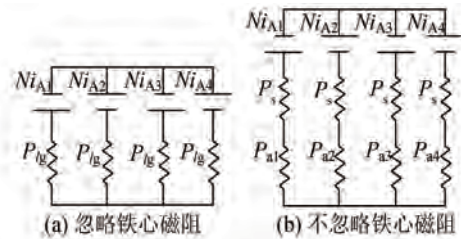


图3 A 相等效磁路图

Fig.3 Equivalent magnetic circuit diagram for phase A

等效磁路如图 3(a) 所示,其中 N 为绕组匝数; P_{a1} 、 P_{a2} 、 P_{a3} 、 P_{a4} 分别为气隙 a1、a2、a3、a4 的磁导。图 3(b) 为不忽略铁心磁阻时的等效磁路图,其中 P_s 为各极磁路中所包含的铁心磁导。

定义转子极轴线对准 A 相定子极轴线时的转子位置角为 0° 。由文献[14]的方法推导出的全周期径向力数学模型与由 Maxwell 计算出的径

向力结果进行对比,结果如图 4 所示,可以看出随着电流的增加,该方法推导的径向力数学模型精度会逐渐降低。这是因为随着电流增加,铁心的磁导率会因磁饱和而逐渐减小,从而不再远大于气隙磁导率,因此忽略铁心磁阻会引起较大误差。若要计及磁饱和的影响,则应使用图 3(b)所示不忽略铁心磁阻的等效磁路。

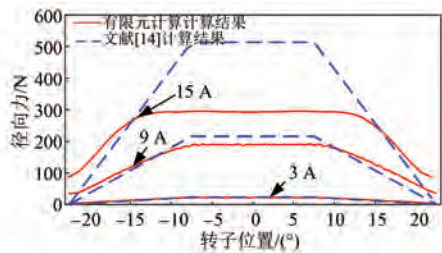


图 4 不考虑磁饱和的径向力数学模型与有限元计算结果对比

Fig. 4 Comparison between the radial force mathematical model without considering magnetic saturation and finite element calculation results

3 气隙磁密及径向力计算

除了磁路中难以避免的电磁饱和以及漏磁现象外,BSRMWR 在运行过程中容易因径向偏心而使得气隙不均匀。这些都使得建立完全符合实际运行情况的数学模型更加困难。为简化分析,做如下假设:

- (1) 不考虑磁路中的漏磁及涡流损耗;
- (2) 与气隙长度相比,转子的径向偏心很小;
- (3) 忽略径向两自由度(即 x 、 y 方向)的耦合。

3.1 气隙磁密计算

利用 Maxwell 建立 BSRMWR 二维有限元模型,以分析电磁特性,主要参数如表 1 所示。

表 1 BSRMW 的二维模型参数			
Tab. 1 Two-dimensional model parameters of the BSRMW			
参数名称	参数值	参数名称	参数值
定子内、外径/mm	49.8、95	转子内、外径/mm	20、49.3
定、转子轭高/mm	6.1、7.65	定、转子极弧/(°)	15、30
气隙/mm	0.25	线圈匝数	30

气隙磁密 B_g 、铁心磁密 B_s 与气隙磁场强度 H_g 、铁心磁场强度 H_s 分别满足关系:

$$B_g = \mu_0 H_g \tag{1}$$

$$B_s = \mu_0 \mu_r H_s \tag{2}$$

式中: μ_0 为真空磁导率,数值为 $4\pi \times 10^{-7}$; μ_r 为铁心材料的相对磁导率。

根据磁通连续定律: $B_g = B_s$ 。结合式(1)、式(2),可知 H_g 与 H_s 满足关系:

$$H_g = \mu_r H_s \tag{3}$$

电机铁心采用硅钢材料 DW310-35,其 $1/\mu_r$ 与 H_s 存在近似正比的关系。采用一次线性关系进行拟合,即:

$$\frac{1}{\mu_r} = a H_s + b \tag{4}$$

拟合结果如图 5 所示,其中拟合系数 $a = 0.483\ 735\ 146\ 1\mu_0$, $b = 196.699\ 233\ 4\mu_0$ 。

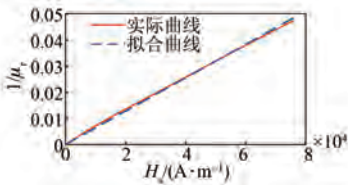


图 5 铁心材料的 $1/\mu_r-H_s$ 拟合结果

Fig. 5 Fitting results of $1/\mu_r-H_s$ for iron core material

将式(4)代入式(2)中,得铁心磁密表达式:

$$B_s = \mu_0 \frac{H_s}{a H_s + b} \tag{5}$$

按式(5)对铁心的磁化曲线 B_s-H_s 进行拟合,结果如图 6 所示。根据 B_s 随 H_s 变化的程度,将磁化曲线分成三段:当 $0\ T < B_s < 0.9\ T$ 时,处于未磁饱和区;当 $0.9\ T < B_s < 2.05\ T$ 时,处于部分磁饱和区;当 $B_s > 2.05\ T$ 时,处于完全磁饱和区。可以看出,在未磁饱和区与完全磁饱和区,拟合误差较小;在部分磁饱和区,拟合误差较大,后续可针对这一区间进一步优化拟合公式。

在未磁饱和区,铁心材料磁阻远小于气隙磁阻,因此可以忽略掉 B_s 在安培环路定律中的影响。在部分磁饱和区和完全磁饱和区,随着 B_s 增大,磁饱和程度愈发严重,气隙磁阻不再远大于铁心磁阻,故需要考虑 B_s 在安培环路定律中的影响。

为了具体研究铁心中的磁饱和情况,分别为 A1 极绕组通入电流 $i_{A1} = 3\ A, 9\ A, 15\ A$,有限元静态分析所得磁密云图如图 7 所示。可以看出,在 $i_{A1} = 3\ A$ 时,定、转子铁心的所有部分都未磁饱

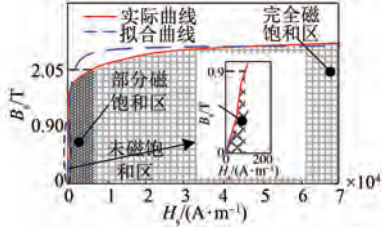


图6 铁心材料的磁化曲线拟合结果

Fig. 6 The fitting results of the magnetization curve of the iron core material

和;在 $i_{A1}=9$ A 时,通电 A1 极部分磁饱和;在 $i_{A1}=15$ A 时,A1 极部分区域完全磁饱和,而与之相邻的转子极以及部分定子轭则部分磁饱和。

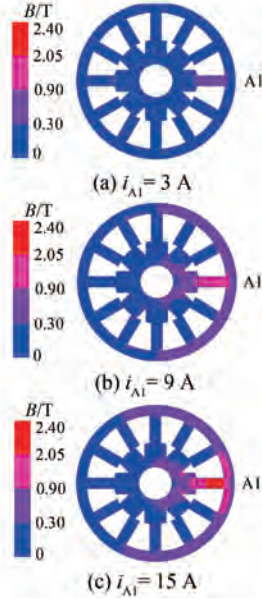


图7 磁密云图

Fig. 7 Magnetic flux density map

仍以 A1 极为例,考虑铁心的影响,根据磁路欧姆定律,按图 3(b) 所示的等效磁路列写磁路方程:

$$H_g l_g + H_s l_s = N i_{A1} \quad (6)$$

式中: l_g 为等效气隙磁路长度; l_s 为等效铁心磁路长度。

将式(1)和式(2)代入式(6),可得:

$$\frac{B_g}{\mu_0} l_g + \frac{B_s}{\mu_0 \mu_r} l_s = N i_{A1} \quad (7)$$

l_s 的大小与磁力线通过铁心的等效路径长度有关。在未磁饱和时, l_s 近似为 0;在部分磁饱和时, l_s 近似等于定子极长度;在完全磁饱和时, l_s 以定子极长度为主,但还包含部分的磁路长度,本

文在应用时,将 l_s 近似取值为定子极长度。

根据转子极与定子极的相对位置,将一个电感周期分为非完全交叠区和完全交叠区:当转子位置角处于区间 $[-7.5^\circ, 7.5^\circ]$ 时,为完全交叠区;当转子位置角处于 $[-22.5^\circ, -7.5^\circ]$ 和 $[7.5^\circ, 22.5^\circ]$ 这两个区间时,为非完全交叠区^[14]。

(1) 完全交叠区的气隙磁密

如图 8 所示,以处于完全交叠区的气隙 a1 为例,由于其边缘气隙磁密很小,因此计算气隙磁密 B_g 时只考虑主气隙磁密 B_m 。

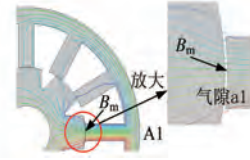


图8 完全交叠区气隙磁密

Fig. 8 Air gap flux density in fully overlap region

对于主气隙磁密 B_m ,其磁路等效长度 l_m 可以看作平均气隙长度 l_0 ,即:

$$l_m = l_0 \quad (8)$$

将式(5)和(8)代入式(7),得到主气隙磁密 B_m :

$$B_m = \mu_0 \frac{l_0 + b l_s + a N i_{A1} + \sqrt{M_m}}{2 a l_0} \quad (9)$$

式中: $M_m = (b l_s + l_0)^2 + (a N i_{A1})^2 + 2 a N i_{A1} (b l_s - l_0)$ 。

(2) 非完全交叠区的气隙磁密

如图 9 所示,以处于非完全交叠区的气隙 a1 为例,气隙磁密 B_g 中除了主气隙磁密 B_m 外,还有两个边缘磁密分量,分别记作 B_{l0} 、 B_{l1} 。

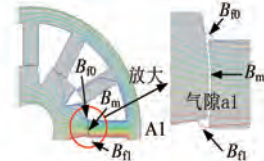


图9 非完全交叠区的气隙磁密

Fig. 9 Air gap flux density in non-overlap region

根据电磁场有限元分析结果,将边缘气隙磁密的路径近似看为四分之一圆弧与直线的组合,以此建立如图 10 所示的假定气隙磁路,用来计算气隙磁路长度。

由于此时主气隙磁密的等效磁路长度也满足 $l_m = l_0$,因此 B_m 的表达式与式(9)相同。

边缘气隙磁密的等效长度 l_{l0} 与 l_{l1} 都与转子

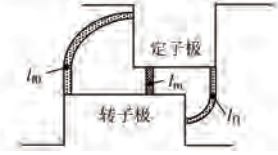


图 10 非完全交叠区的假定气隙磁路

Fig. 10 Assumed air gap magnetic path in non-completely overlap region

位置角有关,分别为

$$l_{g0} = l_g + \pi R [\beta_r - (-\theta + \beta_s/2 + \beta_r/2)] / 2 \quad (10)$$

$$l_{r0} = l_g + \pi R [\beta_s - (-\theta + \beta_s/2 + \beta_r/2)] / 2 \quad (11)$$

式中: \$\beta_s\$ 为定子极弧; \$\beta_r\$ 为转子极弧; \$\theta\$ 为转子位置角; \$R\$ 为转子半径。

将式(5)和式(10)代入式(7),得出 \$B_{r0}\$ 表达式:

$$B_{r0} = \mu_0 \frac{l_{g0} + bl_s + aNi_{A1} + \sqrt{M_{r0}}}{2al_{r0}} \quad (12)$$

式中: \$M_{r0} = (bl_s + l_{g0})^2 + (aNi_{A1})^2 + 2aNi_{A1}(bl_s - l_{g0})\$。

将式(4)和式(11)代入式(7),得出 \$B_{r1}\$ 表达式:

$$B_{r1} = \mu_0 \frac{l_{r1} + bl_s + aNi_{A1} + \sqrt{M_{r1}}}{2al_{r1}} \quad (13)$$

式中: \$M_{r1} = (bl_s + l_{r1})^2 + (aNi_{A1})^2 + 2aNi_{A1}(bl_s - l_{r1})\$。

\$M_m\$、\$M_{r0}\$、\$M_{r1}\$ 是为简化气隙磁密表达式(9)、(12)、(13)而定义的中间变量。

3.2 径向力计算

麦克斯韦应力法认为磁场的张力张量 \$T\$ 等效于有质动力 \$F\$,即给定体积 \$V\$ 的磁质内的合力及力矩等效于包围 \$V\$ 表面的 \$S\$ 面上各张力的合力,可表示为^[20]

$$F = \oint_S T dS = \iiint_V F dV \quad (14)$$

当仅有与积分路径垂直的磁场分量时,作用于曲面 \$S\$ 上的磁应力的法向分量 \$F_n\$ 关于磁通密度法向分量 \$B_n\$ 的计算式为^[21]

$$F_n = \frac{1}{2\mu_0} \iint_S B_n^2 dA \quad (15)$$

设转子铁心的轴向长度为 \$h\$,则整个转子受到的径向力 \$F_r\$ 可以表示为

$$F_r = \int_h F_n dl = \frac{h}{2\mu_0} \iint_S B_n^2 dA \quad (16)$$

(1) 定转子非完全交叠区的径向力

在转子位置角处于区间 \$[-22.5^\circ, -7.5^\circ]\$ 时,选取如图 11 所示的积分路径 1→2→3。

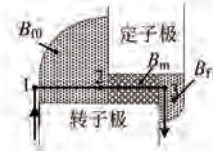


图 11 非完全交叠区的积分路径

Fig. 11 Integration path in non-overlap region

\$i_{A1}\$ 在转子极上引起的径向力 \$F_{A1}\$ 与主气隙磁密 \$B_m\$ 及边缘气隙磁密 \$B_{r0}\$ 的关系满足:

$$F_{A1} = \frac{h}{2\mu_0} \left(\int_1^2 B_{r0}^2 dl + \int_2^3 B_m^2 dl \right) = \frac{h}{2\mu_0} (B_{r0}^2 l_{12} + B_m^2 l_{23}) \quad (17)$$

式中: \$l_{12}\$、\$l_{23}\$ 分别为积分路径 1→2 和 2→3 的长度。

\$l_{12}\$、\$l_{23}\$ 可由转子位置角 \$\theta\$、定子极弧 \$\beta_s\$、转子极弧 \$\beta_r\$ 以及转子半径 \$R\$ 计算:

$$l_{12} = [\beta_r - (\theta + \beta_s/2 + \beta_r/2)] R \quad (18)$$

$$l_{23} = (\theta + \beta_s/2 + \beta_r/2) R \quad (19)$$

将磁密表达式(9)、(12)与积分路径长度表达式(18)、(19)代入式(17),即可得到 \$i_{A1}\$ 产生的径向力 \$F_{A1}\$:

$$F_{A1} = m_1(\theta) k_2(i_{A1}) + m_2(\theta) k_1(i_{A1}) \quad (20)$$

式中的 \$k_1(i_{A1})\$ 和 \$k_2(i_{A1})\$ 与电流 \$i_{A1}\$ 有关, \$m_1(\theta)\$ 和 \$m_2(\theta)\$ 与转子位置角 \$\theta\$ 有关,具体表达式分别为

$$\begin{cases} k_1(i_{A1}) = (aNi_{A1})^2 + 2L_1 aNi_{A1} + (l_g + bl_s)^2 - \\ (l_g + bl_s + aNi_{A1}) \sqrt{(l_g + bl_s + aNi_{A1})^2 - 4l_g aNi_{A1}} \\ k_2(i_{A1}) = (aNi_{A1})^2 + 2bl_s aNi_{A1} + (l_{r1} + bl_s)^2 - \\ (l_{r1} + bl_s + aNi_{A1}) \sqrt{(l_g + bl_s + aNi_{A1})^2 - 4l_{r1} aNi_{A1}} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} m_1(\theta) = \frac{\mu_0 h R (\pi/24 - \theta)}{4a^2 [l_g + \pi R (\pi/24 - \theta) / 4]^2} \\ m_2(\theta) = \frac{\mu_0 h R (\pi/8 + \theta)}{4(al_g)^2} \end{cases} \quad (22)$$

同理,转子位置角处于区间 \$[7.5^\circ, 22.5^\circ]\$ 时, \$i_{A1}\$ 产生的径向力 \$F_{A1}\$ 的表达式为

$$F_{A1} = m_1(-\theta) k_2(i_{A1}) + m_2(-\theta) k_1(i_{A1}) \quad (23)$$

式中的 $k_1(i_{A1})$ 和 $k_2(i_{A1})$ 都与式(21)一致。

(2) 定转子完全交叠区的径向力

当转子位置角处于区间 $[-7.5^\circ, 7.5^\circ]$ 时, 选如图 12 所示的积分路径 4→5。

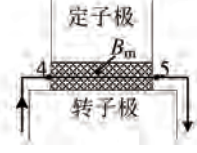


图 12 完全交叠区的积分路径

Fig. 12 Integration path in fully overlap region

i_{A1} 在转子极上引起的径向力 F_{A1} 与主气隙磁密 B_m 的关系满足:

$$F_{A1} = \frac{h}{2\mu_0} \int_4^5 B_m^2 dl = \frac{h}{2\mu_0} B_m^2 l_{45} \quad (24)$$

式中: l_{45} 为积分路径 4→5 的长度, 与定子极弧相等。

$$l_{45} = \frac{\pi R}{12} \quad (25)$$

将磁密表达式(9)和积分路径长度表达式(25)代入式(24), 即可得到径向力 F_{A1} 的表达式:

$$F_{A1} = \frac{\mu_0 h R \pi}{12(a l_g)^2} k_1(i_{A1}) \quad (26)$$

式中的 $k_1(i_{A1})$ 与式(21)一致。

为便于表述, 将 $[-22.5^\circ, -7.5^\circ]$ 、 $[-7.5^\circ, 5^\circ]$ 、 $[7.5^\circ, 22.5^\circ]$ 区间分别记作 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 , 则 F_{A1} 的计算式为

$$F_{A1} = \begin{cases} m_1(\theta)k_2(i_{A1}) + m_2(\theta)k_1(i_{A1}), & \theta \in Q_1 \\ \frac{\mu_0 h R \pi}{12(a l_g)^2} k_1(i_{A1}), & \theta \in Q_2 \\ m_1(-\theta)k_2(i_{A1}) + m_2(-\theta)k_1(i_{A1}), & \theta \in Q_3 \end{cases} \quad (27)$$

由式(27)可以看出, 在定转子非完全交叠区, 径向力 F_{A1} 的计算式较为复杂, 这是由于考虑了边缘气隙磁密。

3.3 径向力的简化

为了比较主气隙磁密和边缘气隙磁密, 需要计算出气隙磁密在不同位置的大小。因此, 如图 13 所示, 在气隙 a1 内画一条与转子极弧等长的弧线 Arc_1 , 其中点位于定子极 A1 的中线上。点 a、点 b 为该弧线的两个顶点, 点 c、点 d 分别为该

弧线上与临近定子极端点和转子极端点相对齐的点。将弧线 Arc_1 上各点与电机转轴中心点连线与 x 轴正方向的夹角 θ_1 称为“气隙磁密位置角”, 则点 a、c、d、b 的气隙磁密位置角分别为 -15° 、 -6° 、 7.5° 、 15° 。

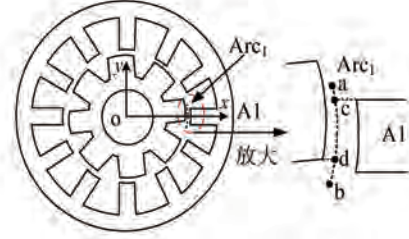


图 13 非完全交叠区的 Arc_1 示意图

Fig. 13 Schematic diagram of Arc_1 in non-overlap area

在图 13 所示位置, 转子位置角 $\theta = 9^\circ$, 定转子极非完全重叠。设置激励电流 $i_{A1} = 9$ A, 利用有限元分析计算出弧线 Arc_1 上的气隙磁密结果如图 14 所示。横轴代表气隙磁密位置角 θ_1 , 其中区间 $[-6^\circ, 7.5^\circ]$ 对应主气隙磁密, $(-15^\circ, -6^\circ)$ 和 $(7.5^\circ, 15^\circ)$ 区间对应边缘气隙磁密。

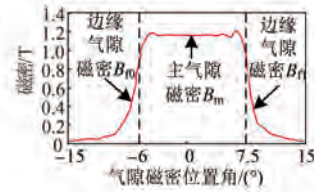


图 14 主气隙磁密与边缘气隙比较 ($\theta = 9^\circ$)

Fig. 14 Comparison of main air gap flux density and edge air gap flux density ($\theta = 9^\circ$)

可以看出, 除定子极端点附近之外, 边缘气隙磁密均远小于主气隙磁密, 故提出忽略边缘气隙磁密的设想, 以简化径向力计算。简化后, 由 i_{A1} 产生的径向力记为 F'_{A1} , 如式(28)所示:

$$F'_{A1} = \begin{cases} m_2(\theta)k_1(i_{A1}), & \theta \in Q_1 \\ \frac{\mu_0 h R \pi}{12(a l_g)^2} k_1(i_{A1}), & \theta \in Q_2 \\ m_2(-\theta)k_1(i_{A1}), & \theta \in Q_3 \end{cases} \quad (28)$$

3.4 两自由度悬浮力计算

与计算 F_{A1} 同理, 不同定子极上绕组引起的径向力也可以分别由对应气隙内的磁密求出。将式(27)拓展为

$$F_{Aj} = \begin{cases} m_1(\theta)k_2(i_{Aj}) + m_2(\theta)k_1(i_{Aj}), & \theta \in Q_1 \\ \frac{\mu_0 h R \pi}{12(al_g)^2} k_1(i_{Aj}), & \theta \in Q_2 \\ m_1(-\theta)k_2(i_{Aj}) + m_2(-\theta)k_1(i_{Aj}), & \theta \in Q_3 \end{cases} \quad (29)$$

式中: $j=1, 2, 3, 4$; $k_1(i_{Aj})$ 和 $k_2(i_{Aj})$ 与电流 i_{Aj} 的关系同式(21)。

径向相对的两个径向力相减, 便可得到径向力 F_{Ax} 、 F_{Ay} , 同时也是沿 x 、 y 轴正方向的径向力 F_x 、 F_y 。

$$\begin{cases} F_x = F_{Ax} = F_{A1} - F_{A3} \\ F_y = F_{Ay} = F_{A2} - F_{A4} \end{cases} \quad (30)$$

忽略边缘气隙磁密对径向力的影响后, 径向力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 简化为

$$\begin{cases} F'_x = F'_{Ax} = F'_{A1} - F'_{A3} \\ F'_y = F'_{Ay} = F'_{A2} - F'_{A4} \end{cases} \quad (31)$$

至此, 单绕组 BSRMWR 在一个完整电感周期内, 由 A 相绕组激励产生的径向力数学模型已经得到。

当 B 相、C 相绕组分别通电时, 可同理求出径向力 F_{Bj} 、 F_{Cj} , 并简化为

$$F'_{Bj} = \begin{cases} m_2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) k_1(i_{Bj}), & \theta \in Q_1 \\ \frac{\mu_0 h R \pi}{12(al_g)^2} k_1(i_{Bj}), & \theta \in Q_2 \\ m_2\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) k_1(i_{Bj}), & \theta \in Q_3 \end{cases} \quad (32)$$

$$F'_{Cj} = \begin{cases} m_2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) k_1(i_{Cj}), & \theta \in Q_1 \\ \frac{\mu_0 h R \pi}{12(al_g)^2} k_1(i_{Cj}), & \theta \in Q_2 \\ m_2\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) k_1(i_{Cj}), & \theta \in Q_3 \end{cases} \quad (33)$$

将式(32)、(33)中径向相对的两个径向力分别相减, 得到简化后的径向力 F'_{Bx} 、 F'_{By} 、 F'_{Cx} 、 F'_{Cy} (方向如图 1 所示), 投影到 x 、 y 轴上即可得到 B、C 两相分别产生的沿 x 、 y 轴正方向的径向力:

$$\begin{bmatrix} F'_x \\ F'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{Bx} \\ F'_{By} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} F'_x \\ F'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \\ -\cos 30^\circ & \sin 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{Cx} \\ F'_{Cy} \end{bmatrix} \quad (35)$$

4 气隙磁密与径向力的验证

将前文基于 Maxwell 建立的二维有限元模型的铁心长度轴向拉伸为 55 mm, 建立的三维有限元模型如图 15 所示, 用来验证本文所建数学模型的准确性。

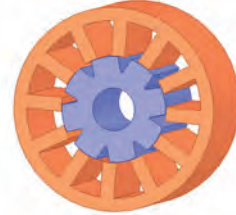


图 15 三维有限元模型

Fig. 15 Three-dimensional finite element model

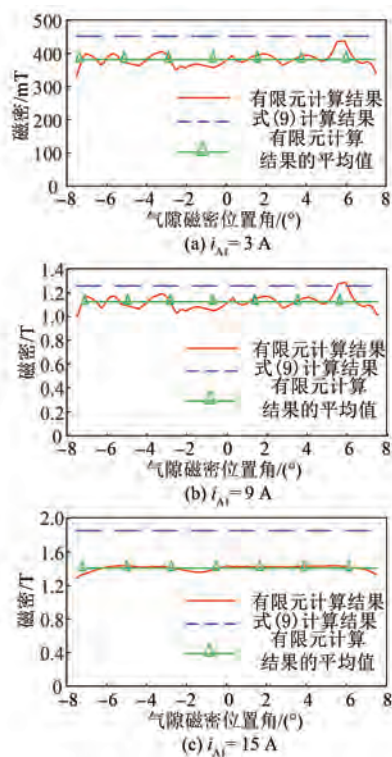
4.1 气隙磁密的对比与验证

分别为 A1 极绕组通入 3 A、9 A、15 A 的电流, 以验证所建磁密模型在未磁饱和、部分磁饱和区以及完全磁饱和状态下的准确性。由于在计算径向力时采用的是主气隙磁密的平均值, 即平均主气隙磁密, 因此将式(9)计算结果与三维有限元计算结果及平均值进行比较。而对于边缘气隙磁密, 则将式(12)计算结果直接与三维有限元计算结果进行比较。

设置转子位置角 θ 为 0° , 使电机处于完全交叠区, 此时仅 B_m 对径向力结果造成影响, 对比计算结果如图 16 所示。分析可知: $i_{A1} = 3$ A 时, B_m 有限元计算结果的平均值为 381.89 mT, 与式(9)计算结果的误差为 15.58%; $i_{A1} = 9$ A 时, B_m 有限元计算结果的平均值为 1.12 T, 与式(9)计算结果的误差为 10.86%; $i_{A1} = 15$ A 时, B_m 有限元计算结果的平均值为 1.41 T, 与式(9)计算结果的误差为 23.94%。

设置转子位置角 θ 为 9° , 使电机处于非完全交叠区, 此时 B_m 和 $B_{\theta 0}$ 都对径向力结果有影响。主气隙磁密对比如图 17 所示, 分析可知: $i_{A1} = 3$ A 时, B_m 有限元计算结果的平均值为 379.34 mT, 与式(9)计算结果的误差为 16.14%; $i_{A1} = 9$ A 时, B_m 有限元计算结果的平均值为 1.13 T, 与式(9)计算结果的误差为 13.75%; $i_{A1} = 15$ A 时, B_m 有限元计算结果的平均值为 1.46 T, 与式(9)计算结果的误差为 21.25%。

边缘气隙磁密 $B_{\theta 0}$ 的对比图如图 18 所示, 可

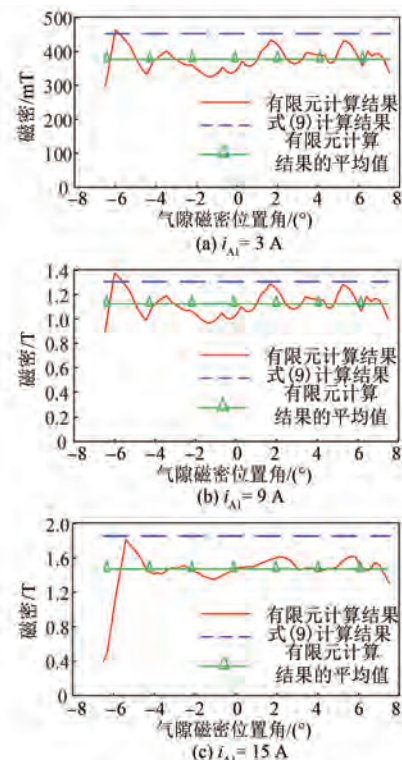
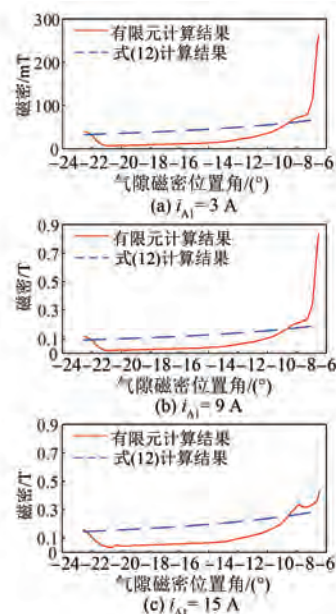
图 16 主气隙磁密对比图 ($\theta=0^\circ$)Fig. 16 Comparison diagram of main air gap flux density ($\theta=0^\circ$)

可以看出,气隙磁密模型的计算结果与有限元计算结果整体比较相符,只是在定子极端点的附近会有较大误差。推测主要原因是在定子极边缘的假想边缘磁通路径与实际情况偏差较大。值得注意的是,基于麦克斯韦应力法计算径向力时,在沿积分路径积分的过程中,主气隙磁密和边缘气隙磁密的误差会有一个累加的效果。因此,只要最终的径向力计算精度满足要求,则可以认为所建立的气隙磁密模型有效。

4.2 径向力的对比与验证

分别为 A1 极绕组通入电流 $i_{A1} = 3\text{ A}, 9\text{ A}, 15\text{ A}$ 以模拟未磁饱和、部分磁饱和以及完全磁饱和的情形,进行瞬态有限元分析。在一个完整周期内,以三维有限元计算结果为参考,将文献[14]中的径向力模型、本文式(27)所示径向力模型以及式(28)所示简化后的径向力模型计算结果作比较,如图 19 所示。

可以看出,式(27)、(28)具有更好的精度,但是在 $\theta = \pm 22.5^\circ$ 处(即一个周期的始末),径向力模型的计算结果与有限元计算结果有非常大的误

图 17 主气隙磁密对比图 ($\theta=9^\circ$)Fig. 17 Comparison diagram of main air gap flux density ($\theta=9^\circ$)图 18 边缘气隙磁密 B_θ 对比图 ($\theta=9^\circ$)Fig. 18 Comparison diagram of edge air gap B_θ flux density ($\theta=9^\circ$)

差。不能仅因为某处的大偏差就否认径向力模型的价值,因此尝试对径向力模型与有限元计算结

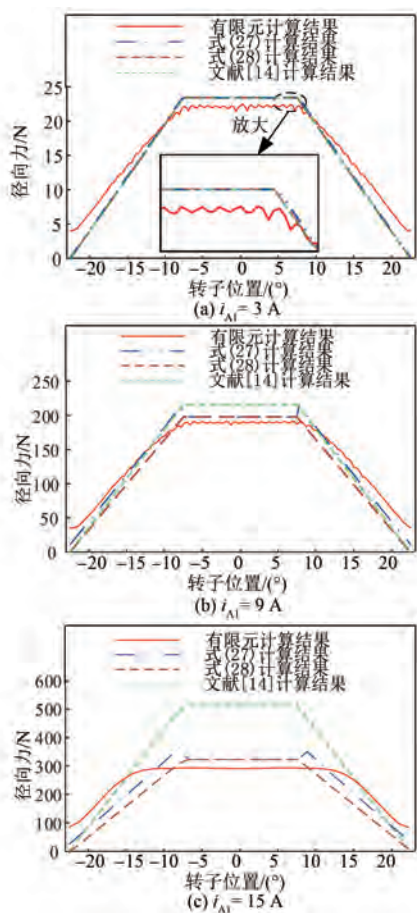


图 19 x 轴正方向径向力全周期模型对比图

Fig. 19 Comparison diagram of the full cycle model of radial force in the positive direction of the x -axis

果的绝对误差求均值,以更合理地量化误差,从而从整体的角度去评价径向力模型的适用性。

分析图 19(a)可知, $i_{A1} = 3$ A 时,三种径向力模型的计算结果均与有限元计算结果比较相符,精度良好。

分析图 19(b)可知, $i_{A1} = 9$ A 时,文献[14]径向力模型、本文式(27)、式(28)与有限元计算结果的绝对误差平均值分别是 19.19%、11.19%、18.77%,本文式(27)、式(28)两种模型的精度更高。其中式(27)的精度最高,但在 $\theta = \pm 7.5^\circ$ 处有一个马鞍形的降落。

分析图 19(c)可知, $i_{A1} = 15$ A 时,文献[14]径向力模型、本文式(27)、式(28)与有限元计算结果的绝对误差平均值分别是 43.33%、14.05%、25.84%。三种数学模型在完全交叠区的计算结果差异最大,因此在此区间内进一步进行比较,可得:文献[14]径向力模型与有限元计算结果的最

大误差为 75.41%,式(27)和式(28)与有限元计算结果的最大误差均为 10.78%。但式(28)在 $\theta = \pm 7.5^\circ$ 处没有一个马鞍形的降落,因此比式(27)能更好地描述有限元计算结果的整体趋势。

综上,在铁心未磁饱和以及部分磁饱和时,所建考虑磁饱和的径向力模型能较准确地描述出径向力的整体变化规律,简化前的模型精度更高,而简化后的模型对径向力随转子位置角变化趋势的描述更好。在完全磁饱和时,所建考虑磁饱和的径向力模型在简化前后都能比不考虑磁饱和的径向力模型精度更好,但简化前的模型对径向力随转子位置角整体变化趋势的描述却不如简化后,这可能是由于此时的边缘气隙磁密与假定情况有较大差异。

需要说明的是,三维有限元分析对计算资源的占用以及所需的时长都远大于二维有限元分析,但对磁密和径向力的反映会更精确,能反映的影响因素也更多(例如漏磁和绕组端部效应)。

5 结语

径向力是无轴承开关磁阻电机的重要性能指标,有效的径向力数学模型可以为电机本体和控制系统设计提供理论参考。考虑到无轴承开关磁阻电机经常在磁饱和状态工作,而经典的忽略磁饱和影响的径向力解析模型具有不适用于磁饱和和工况的局限性。因此本文以 BSRMWR 为研究对象,对铁心的磁化曲线进行拟合,结合麦克斯韦应力法推导了考虑磁饱和影响的全周期径向力模型,并在对比分析了边缘气隙磁密和主气隙磁密对径向力的影响后,对所建径向力模型进行简化,减小了计算量。最后利用三维有限元分析验证了所建径向力模型对未磁饱和、部分磁饱和以及完全磁饱和工况均适用。该模型的建立可以为电机运行特性分析、本体优化以及控制器设计提供更准确的理论参考。在忽略边缘气隙磁密后,还可使模型大幅简化,降低复杂度,从而有更高的应用价值。

参考文献

- [1] 刘志彤, 柴智远, 周福林, 等. 双绕组开关磁阻电机重复脉冲发电的解耦控制方法研究[J/OL]. 中国电机工程学报, 2023-1-10. <http://kns.cnki>.

- net/kcms/detail/11. 2107. TM. 20231109. 0853. 002. html.
- LIU Z T, CHAI Z Y, ZHOU F L, et al. Research on decoupling control method for repetitive pulse generation of double winding switched reluctance generator [J/OL]. Proceedings of the CSEE, 2023-1-10. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2107.TM.20231109.0853.002.html>.
- [2] 陈凌,王宏华,谭超. 基于麦克斯韦应力法的双绕组无轴承开关磁阻电机新型数学模型[J]. 电机与控制学报, 2017, 21(11): 9-18.
- CHEN L, WANG H H, TAN C. Innovative mathematical model for dual-winding bearingless switched reluctance motor based on Maxwell stress tensor method [J]. Electric Machines and Control, 2017, 21(11): 9-18.
- [3] 黄柱良,王喜莲,王璇,等. 共悬浮绕组式无轴承开关磁阻电机两相导通解析模型建立及分析[J]. 北京交通大学学报, 2023, 47(4): 146-153+178.
- HUANG Z L, WANG X L, WANG X, et al. Establishment and analysis of mathematical model for sharing suspension winding bearingless switched reluctance motor considering two-phase excitation [J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2023, 47(4): 146-153+178.
- [4] 向宇. 无轴承开关磁阻电机功率变换器与转矩脉动抑制研究[D]. 南京: 南京邮电大学, 2022.
- XIANG Y. Research on power converter and torque ripple suppression of bearingless switched reluctance motor [D]. Nanjing: Nanjing University of Posts and Telecommunications, 2022.
- [5] 薛惟栋,曲兵妮. 抑制开关磁阻电机振动的结构设计研究[J]. 电机与控制应用, 2021, 48(11): 39-44.
- XUE W D, QU B N. Structural design of switched reluctance motor for vibration [J]. Electric Machines & Control Application, 2021, 48(11): 39-44.
- [6] LEE D H, WANG H J, AHN J W. Modeling and control of novel bearingless switched reluctance motor [C] // IEEE Energy Conversion Congress and Exposition, San Jose, CA, 2009.
- [7] GUAN Z Y, ZHANG F G, AHN J. High speed direct current compensation control for 8/10 bearingless SRM [C] // 2012 IEEE International Symposium on Industrial Electronics, Hangzhou, 2012.
- [8] 项倩雯,彭振德,欧钰,等. 基于定转子开窗的混合动力磁双定子 BSRM 振动抑制[J]. 电机与控制应用, 2023, 50(7): 43-50.
- XIANG Q W, PENG Z D, OU Y, et al. Vibration suppression of hybrid excitation double-stator BSRM based on stator-rotor fenestrating [J]. Electric Machines & Control Application, 2023, 50(7): 43-50.
- [9] 闫文举,陈昊,刘永强,等. 一种用于电动汽车磁场解耦型双定子开关磁阻电机的新型功率变换器[J]. 电工技术学报, 2021, 36(24): 5081-5091.
- YAN W J, CHEN H, LIU Y Q, et al. A novel power converter on magnetic field decoupling double stator switched reluctance machine for electric vehicles [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2021, 36(24): 5081-5091.
- [10] XU Z, LEE D, AHN J. Suspending force control of a novel 12/14 hybrid stator pole type bearingless SRM [C] // 2012 15th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS), Sapporo, 2012.
- [11] 曹鑫,李小笛,刘晨昊,等. 基于旋转坐标系的锥形无轴承开关磁阻电机数学模型[J]. 电工技术学报, 2018, 33(17): 4029-4036.
- CAO X, LI X D, LIU C H, et al. Mathematical model of conical bearingless switched reluctance motor based on rotating coordinate system [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2018, 33(17): 4029-4036.
- [12] 袁意. 单绕组 12/8 极宽转子齿结构无轴承开关磁阻电机发电运行控制策略[D]. 南京: 南京邮电大学, 2020.
- CHANG Y. Power generation operation control strategy for 12/8 pole single-winding bearingless switched reluctance motor with wider rotor teeth [D]. Nanjing: Nanjing University of Posts and Telecommunications, 2020.
- [13] 袁野,施天宇,孙玉坤,等. 12/14 磁悬浮开关磁阻电机悬浮系统解耦控制策略[J/OL]. 中国电机工程学报, 2023-1-10. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2107.TM.20220928.1048.010.html>.
- YUAN Y, SHI T Y, SUN Y K, et al. Decoupling control of suspension system for 12/14 bearingless switched reluctance motor [J/OL]. Proceedings of the CSEE, 2023-1-10. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2107.TM.20220928.1048.010.html>.
- [14] 王成敏,王爱元,姚晓东,等. 基于 MEA-BP 神经

- 网络的开关磁阻电机静态电磁特性建模[J]. 电机与控制应用, 2022, 49(5): 64-68.
- WANG C M, WANG A Y, YAO X D, et al. Modeling of static electromagnetic characteristics of switched reluctance motor based on MEA-BP neural network [J]. Electric Machines & Control Application, 2022, 49(5): 64-68.
- [15] WU X, YANG Y, LIU Z Y. Theoretical analysis and simulation of single winding bearingless switched reluctance generator with wider rotor teeth [J]. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2018, 56: 387-398.
- [16] HAO W M, HAO J, WANG Z F, et al. Characteristics and torque analytical model of sharing-suspension-windings bearingless switched reluctance motor considering fluxlinkage saturation [J]. Sustainability, 2022, 24: 16633-16646
- [17] 朱伟明. 单绕组宽转子齿无轴承开关磁阻电机振动噪声基础研究[D]. 南京: 南京邮电大学, 2022.
- ZHU W M. Basic research on vibration and noise of single-winding bearingless switched reluctance motor [D]. Nanjing: Nanjing University of Posts and Telecommunications, 2022.
- [18] 周云红, 王东, 黄飞, 等. 单绕组宽转子极无轴承开关磁阻电机径向力模型的全周期拓展[J/OL]. 电机与控制学报, 2023-1-9. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1408.TM.20230531.1125.014.html>.
- ZHOU Y H, WANG D, HUANG F, et al. Full-period extension of radial force model of single winding bearingless switched reluctance motor with wide rotor [J/OL]. Electric Machines and Control, 2023-1-9. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1408.TM.20230531.1125.014.html>.
- [19] 张敏杰, 高强, 蔡旭. 基于改进磁密计算的开关磁阻电机径向力解析建模[J]. 电机与控制应用, 2019, 46(11): 56-63.
- ZHANG M J, GAO Q, CAI X. Analytical modeling of radial force of switched reluctance motor based on improved flux density calculation [J]. Electric Machines & Control Application, 2019, 46(11): 56-63.
- [20] 阎秀恪, 谢德馨, 高彰燮, 等. 电磁力有限元分析中麦克斯韦应力法的积分路径选取的研究[J]. 电工技术学报, 2003, 5: 32-36.
- YAN X K, XIE D X, GAO Z X, et al. Research on integration path selection of Maxwell stress tensor method used in electromagnetic force FEM analysis [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2003, 5: 32-36.
- [21] GARRIGAN N R, SOONG W L, STEPHENS C M, et al. Radial force characteristics of a switched reluctance machine [C] // IEEE Industry Applications Conference, Schenectady, New York, 2002.
-
- 收稿日期:2023-10-08
收到修改稿日期:2023-12-11
作者简介:
周云红(1982-),女,博士,教授,研究方向为磁悬浮传动技术、磁阻电机及其驱动技术和智能配用电技术等, 404740702@qq.com;
*通信作者:谭正一(1998-),男,硕士研究生,研究方向为磁阻电机分析设计,1010076692@qq.com。

Radial Force Modeling of a Bearingless Switched Reluctance Motor with Wide Rotor Considering Magnetic Saturation

ZHOU Yunhong, TAN Zhengyi*, WANG Dong, LI Hanjie

(School of Power Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China)

Key words: switched reluctance motor; bearingless motor; wide rotor; radial force mathematical model; magnetic saturation; full period

The schematic diagram of a single-winding bearingless switched reluctance motor with wide rotors (BSRMWR) is shown in Fig.1, in which only the A-phase windings and currents are marked. Compared to traditional switched reluctance motors, BSRMWR has the advantage of decoupling radial force and suspension force through two-phase conduction, therefore has received increasing attention.

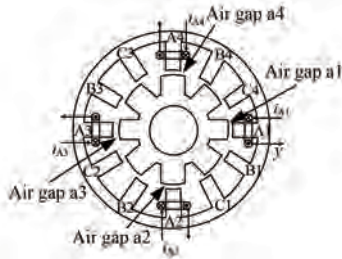


Fig. 1 Basic structure diagram of BSRMWR

A full-period radial force mathematical model for BSRMWR that can take into account the influence of magnetic saturation is studied in this paper. After comparing the effects of the edge air gap flux density and the main air gap flux density on the radial force, the established radial force model is simplified so that the computational complexity could be reduced.

Taking the three-dimensional finite element calculation results as a reference, compared the radial force model in reference [14], the radial force model shown in equation (27), and the simplified radial force model shown in equation (28), as shown in Fig.2.

It can be seen that the established radial force model is applicable to this motor under non magnetic saturation, partial magnetic saturation, and complete magnetic saturation conditions.

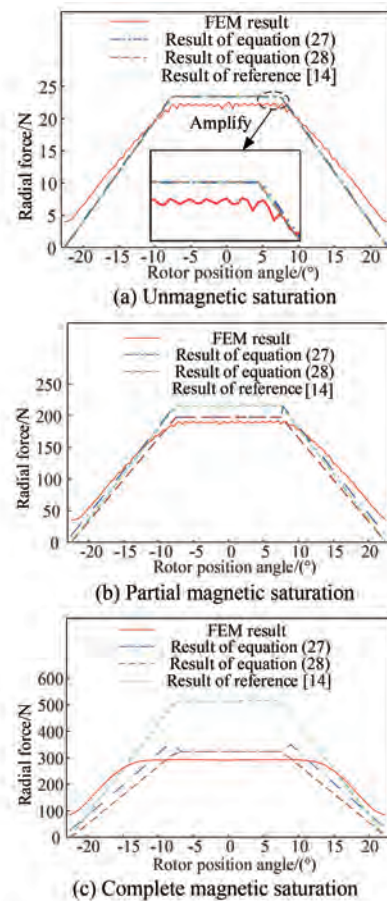


Fig. 2 Comparison diagram of the full cycle model of radial force in the positive direction of the x-axis